

東京大学（理科） 1991 年 第 6 問

$f(x)$ は $x > 0$ で定義された連続な関数で、 $0 < x_1 < x_2$ ならば、つねに $f(x_1) > f(x_2) > 0$ であるものとし、 $S(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$ とおく。このとき、 $S(1) = 1$ であり、さらに任意の $a > 0$ に対して、原点と点 $(a, f(a))$ 、原点と点 $(2a, f(2a))$ を結ぶ 2 直線と曲線 $y = f(x)$ とで囲まれる部分の面積は $3S(a)$ に等しいものとする。

(1) $S(x)$, $f(x) - 2f(2x)$ をそれぞれ x の関数として表せ。

(2) $x > 0$ に対して、 $a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n f(2^n x)$ とおく。積分 $\int_x^{2x} a(t) dt$ の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ を決定せよ。