

東京大学（理科） 1990 年 第 4 問

行列 $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+a^2} & -\frac{a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{1}{1+a^2} \end{pmatrix}$ に対し、点列 $P_n = (x_n, y_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

を次のように定める。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \dots$$

- (1) a が正の実数を動くとき、 $\triangle P_0 P_1 P_2$ の面積を最大にする a の値を求めよ。
- (2) a を (1) で求めた値とする。 $\triangle P_0 P_1 P_2, \triangle P_1 P_2 P_3, \dots, \triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ の和集合として表される図形の面積を S_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。