

虚部が正の複素数の全体を H とする。すなわち、

$$H = \{z = x + iy \mid x, y \text{ は実数で } y > 0\}$$

とする。以下 z を H に属する複素数とする。 q を正の実数とし、

$$f(z) = \frac{z + 1 - q}{z + 1}$$

とおく。

(1) $f(z)$ もまた H に属することを示せ。

(2) $f_1(z) = f(z)$ と書き、以下 $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して

$$f_2(z) = f(f_1(z)), \quad f_3(z) = f(f_2(z)), \quad \dots, \quad f_n(z) = f(f_{n-1}(z)), \quad \dots$$

とおく。このとき、各 n に対して

$$f_n(z) = \frac{r_n z + (1 - q)s_n}{s_n z + r_n}, \quad r_n^2 - (1 - q)s_n^2 = q^n$$

が成り立つような z によらない実数 r_n, s_n がとれることを示せ。