

2 以上の自然数 k に対して $f_k(x) = x^k - kx + k - 1$ とおく。このとき、次のことを証明せよ。

- i) n 次多項式 $g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるためには、 $g(x)$ が定数 $a_2, \dots, a_n$ を用いて

$$g(x) = \sum_{k=2}^n a_k f_k(x)$$

の形に表されることが必要十分である。

- ii) n 次多項式 $g(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れるためには、 $g(x)$ が関係式

$$\sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2} a_k = 0$$

をみたす定数 $a_2, \dots, a_n$ を用いて

$$g(x) = \sum_{k=2}^n a_k f_k(x)$$

の形に表されることが必要十分である。