

東京大学（理科） 1975 年 第 6 問

赤球が一個と白球が三個入った容器 A と、ほかに赤球と白球の入った容器 B と C がある。

いま、A, B, C から無作為に一個ずつ合計三個の球を取り出し、これらからやはり無作為に一個をとって A にかえすという操作を繰り返す。

ただし容器 B から赤球が取り出される確率と白球が取り出される確率とは共に $\frac{1}{2}$ に保たれており、容器 C からはつねに赤球が取り出されるものとする。

- (i) 上記の操作を n 回くり返したとき、容器 A に x 個の赤球が入っている確率を $P_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ で表せば、関係式

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{12}(6+x)P_n(x) + \frac{1}{24}(1+x)P_n(x+1) + \frac{1}{8}(5-x)P_n(x-1)$$

が成り立つことを証明せよ。ただし $x \leq -1$ または $x \geq 5$ のときは $P_n(x) = 0$ と定める。

- (ii) n 回目の操作を終えたとき A の中にある赤球の数の期待値 E_n を求めよ。

- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ を求めよ。