

東京大学（理科） 1971 年 第 2 問

正数 x を与えて,

$$2a_1 = x, \quad 2a_2 = a_1^2 + 1, \quad \cdots \cdots, \quad 2a_{n+1} = a_n^2 + 1, \quad \cdots \cdots$$

のように数列 $\{a_n\}$ を定めるとき,

- (1) $x \neq 2$ ならば, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ となることを証明せよ。
- (2) $x < 2$ ならば, $a_n < 1$ となることを証明せよ。このとき, 正数 ϵ を $1 - \frac{x}{2}$ より小となるようにとって, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ まだが $1 - \epsilon$ 以下となったとすれば, 個数 n について次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$2 - x > n\epsilon^2$$