

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2026 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

第 1 問

座標空間の 5 点を

$$A(1, 0, 0), \quad B(0, 1, 0), \quad C(0, 0, 1), \quad P\left(\frac{1}{3}, 0, 0\right), \quad Q\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$$

とする。 $0 < r < 1$ を満たす実数 r に対して、線分 AC を $1-r:r$ に内分する点を R とする。

- (1) R の座標を r を用いて表せ。
- (2) P, Q, R を通る平面と線分 BC の交点 S の座標を, r を用いて表せ。
- (3) r が $0 < r < 1$ の範囲を動くとき, 三角形 PQS の面積の最小値と, そのときの r の値を求めよ。

第 2 問

a, b, c, d を実数とし、数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を以下で定める。

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, & y_1 &= 1, \\x_{n+1} &= ax_n + by_n, & y_{n+1} &= cx_n + dy_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)\end{aligned}$$

また、 θ を実数とする。

$$\begin{aligned}x_2 &= -2 \sin \theta, & y_2 &= 2 \cos \theta, \\x_3 &= -4 \sin(2\theta), & y_3 &= 4 \cos(2\theta)\end{aligned}$$

が成り立つとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、 a, b, c, d を求めよ。

以下では $0 < \theta < \pi$ とする。

(2) a, b, c, d を θ を用いて表せ。

(3) 一般項 x_n, y_n を推測し、その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて示せ。

(4) $x_n = 256, y_n = 0$ を満たす自然数 n と θ ($0 < \theta < \pi$) の組をすべて求めよ。

第 3 問

a を 2 より大きい実数とし、関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = |x(x+a)|,$$

$$g(x) = -2x$$

で定める。 xy 平面上で、 $y = f(x)$ のグラフを C とし、 $y = g(x)$ のグラフを ℓ とする。

- (1) C と ℓ は相異なる 3 つの共有点を持つことを示せ。
- (2) C と ℓ の 3 つの共有点を、 x 座標の大きい方から順に P , Q , R とする。 C と線分 PQ で囲まれる図形の面積を S_1 とし、 C と線分 QR で囲まれる図形の面積を S_2 とする。 S_1 , S_2 を a を用いて表せ。
- (3) a が $2 < a \leq 8$ の範囲を動くとき、 $S_1 - S_2$ のとりうる値の範囲を求めよ。

第 4 問

i を虚数単位とする。複素数平面の原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。

- (1) C 上の点 z_1, z_2, z_3 に対し, $z_n = \cos \theta_n + i \sin \theta_n$ ($n = 1, 2, 3$) とおく。ただし, θ_n は実数である。このとき

$$\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right|^2 = 3 + 2\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_2 - \theta_3) + \cos(\theta_3 - \theta_1)\}$$

が成り立つことを示せ。

- (2) 点 w が C 上を動くとき, $\left| \frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{w^3} \right|$ の最大値と最小値を求め, 最大値と最小値を与える w をそれぞれ求めよ。
- (3) 点 z が C 上を動くとき, $\left| 1 + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^{10}} \right|$ を最小にする z の個数を求めよ。

第 5 問

$1 < t < e$ とする。ただし、 e は自然対数の底である。 xy 平面上で、連立不等式

$$t \leq x \leq e, \quad 0 \leq xy \leq \log x$$

によって定まる領域の面積を $A(t)$ とする。また、連立不等式

$$x \geq \frac{t}{2}, \quad \log t \leq ty \leq 1, \quad \log x \leq xy \leq 1$$

によって定まる領域の面積を $B(t)$ とする。

(1) $A(t)$ を t を用いて表せ。

(2) t が $1 < t < e$ の範囲を動くとき、 $\frac{B(t)}{A(t)}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

第 6 問

e は自然対数の底とする。関数 $f(x)$ は、導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち、すべての実数 x について

$$f(x) = e^x \cos x - \int_0^x f(t) \sin(t - x) dt$$

を満たす。以下の問いに答えよ。

- (1) $\int_0^x e^t \cos t dt, \int_0^x e^t \sin t dt$ を求めよ。
- (2) $f(0), f'(0), f''(0)$ を求めよ。
- (3) $f''(x)$ を求めよ。
- (4) $f(x)$ を求めよ。