

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2025 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

第 1 問

実数の組 (a, r) に関する以下の条件 (A) を考える。

- (A) 初項 a , 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ は, すべての正の整数 n について $\tan a_{n+1} = \tan 3a_n$ を満たす。ただし, いずれの正の整数 n に対しても, a_n および $3a_n$ は $\frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k は整数) の形でない。
- (1) 組 (a, r) が条件 (A) を満たすとき, $\tan ar = \tan 3a$ および $\tan ar^2 = \tan 3ar$ が成り立つことを示せ。
- (2) 組 (a, r) が条件 (A) を満たし, かつ $\frac{a}{\pi}$ が無理数であるとき, $r = 3$ であることを示せ。
- (3) 組 $\left(\frac{2}{5}\pi, r\right)$ が条件 (A) を満たすとき, r は整数であることを示せ。
- (4) $1 \leq r \leq 10$ を満たす r で, 組 $\left(\frac{2}{5}\pi, r\right)$ が条件 (A) を満たすものをすべて求めよ。

第 2 問

正の実数 p に対して、 $f(x) = x^3 - x + p$ とする。

- (1) x についての方程式 $f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつとき、 p のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) a, b, c は実数で $c > 0$ とする。また、 i を虚数単位とする。 $a, b + ci, b - ci$ が方程式 $f(x) = 0$ の解であるとき、 a, c, p をそれぞれ b を用いて表し、 b のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) (2) の b, c について、少なくともどちらか一方は整数でないことを示せ。

第 3 問

座標平面において円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ を C とする。 a を 1 より大きい実数とし、2 点 $A(2a, 0)$, $B(-a, 0)$ をとる。点 A を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが小さい方を ℓ_1 とし、点 B を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが大きい方を ℓ_2 とする。 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を D とする。

- (1) 直線 ℓ_1 の方程式を a を用いて表せ。
- (2) 点 D から x 軸へ下ろした垂線と x 軸の交点を H とする。 $\triangle BDH$ と $\triangle ADH$ の面積の比が $5:4$ であるとき、 a の値を求めよ。
- (3) a が (2) で求めた値であるとき、 $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ。また、 $\triangle ABD$ の外接円の中心と半径を求めよ。

第 4 問

i を虚数単位とする。 a は 1 でない正の実数の定数とする。複素数平面において、方程式 $|z - a^2i| = a|z - i|$ を満たす点 z が表す図形を C とする。

- (1) 図形 C は原点 O を中心とする円であることを示し、その半径を求めよ。

以下の問いでは点 z は円 C 上を動くとし、 z の偏角を θ とする。ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。また、 $w = z - \frac{1}{z}$ とおく。

- (2) $|w - 2i|^2$ を a と $\sin \theta$ を用いて表せ。
- (3) $|w - 2i| + |w + 2i|$ は点 z の位置によらない定数であることを示せ。

第 5 問

$f(x) = \frac{\sin(\log x)}{x}$ ($x > 1$) について以下の問いに答えよ。

- (1) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ。
- (2) n を正の整数とする。関数 $f(x)$ が極大値をとる x で, $e^{2(n-1)\pi} < x < e^{2n\pi}$ となるものがただ 1 つ存在することを示せ。また, 関数 $f(x)$ が極小値をとる x で, $e^{2(n-1)\pi} < x < e^{2n\pi}$ となるものがただ 1 つ存在することを示せ。
- (3) 正の整数 n に対して, (2) の極大値をとる x を α_n , 極小値をとる x を β_n とする。このとき,

$$\frac{1}{\pi} \left\{ \log \left| \sum_{n=1}^{\infty} f''(\alpha_n) \right| - \log \left| \sum_{n=1}^{\infty} f''(\beta_n) \right| \right\}$$

は整数となる。その値を求めよ。

第 6 問

$f(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}$ ($x \geq 0$) とし, $\alpha = \int_0^5 f(x) dx$ とする。

- (1) $f(x)$ ($x \geq 0$) が最大値をとることを示し, その値 M を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq 5$ において $e^{-\frac{25}{4}}\sqrt{x} \leq f(x)$ を示せ。また, $\frac{10}{3}f(5) \leq \alpha$ を示せ。
- (3) M は (1) で求めたものとし, 実数 t は $\frac{2}{3}f(5) \leq t \leq M$ の範囲を動くとする。曲線 $y = f(x) - t$ ($x \geq 0$), 2 直線 $x = 0$, $x = 5$, および x 軸で囲まれた図形を, x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(t)$ とする。 $V(t)$ の最小値を α を用いて表せ。