

# 入学試験過去問題

## 数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2024 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

## 第 1 問

$\triangle OAB$  において、 $OA = OB = 4$ 、 $AB = 2$  とする。 $\angle OAB$  の二等分線と線分  $OB$  の交点を  $C$  とし、点  $O$  から直線  $AC$  に垂線  $OD$  を引く。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とおく。以下の問いに答えよ。

(1)  $\overrightarrow{AC}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  を用いて表せ。

(2)  $\overrightarrow{OD}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  を用いて表せ。

(3)  $\triangle BCD$  の面積を求めよ。

## 第 2 問

以下の問いに答えよ。

- (1)  $x > 1$ ,  $y > 1$  のとき, 不等式

$$\log_x y + \log_y x \geq 2$$

が成り立つことを示せ。

- (2) 座標平面において, 連立不等式

$$x > 1, \quad y > x, \quad \log_x y + \log_y x < \frac{5}{2}$$

の表す領域を図示せよ。

- (3) (2) の領域の中で  $x^2 + y^2 < 12$  を満たす部分に境界線を含めた図形を  $D$  とする。  
 $D$  の面積を求めよ。

### 第 3 問

$f(x) = x(x+1)(x-1)$  とする。座標平面において、曲線  $y = f(x)$  を  $C$  とし、曲線  $C$  上の点  $(t, f(t))$  における接線を  $L$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線  $L$  の方程式を  $t$  を用いて表せ。
- (2)  $t \neq 0$  のとき、直線  $L$  と曲線  $C$  の共有点で、点  $(t, f(t))$  とは異なるものを  $(a, f(a))$  とする。 $a$  を  $t$  を用いて表せ。また、 $t$  が  $0$  を除いた実数を動くとき、 $f'(t)f'(a)$  の最小値を求めよ。
- (3) 次の条件 (A) を満たすような実数  $t$  の範囲を求めよ。
  - (A) 曲線  $C$  上の点  $(s, f(s))$  における接線が直線  $L$  と直交するような実数  $s$  が存在する。

## 第 4 問

座標平面において、媒介変数表示

$$x = -t \left( t - \frac{3}{2} \right), \quad y = \sin \pi t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

で表される曲線を  $C$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 定積分  $\int_0^1 t \sin \pi t \, dt$  を求めよ。
- (2) 実数  $a$  に対し、曲線  $C$  と直線  $x = a$  の共有点の個数を求めよ。
- (3) 曲線  $C$  と  $x$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

## 第 5 問

$a$  と  $b$  は実数の定数とする。関数

$$f(x) = (1 - 2x^2) \cos 2x + 2x \sin 2x + a \cos^2 x + b \int_0^x t \sin 2t \, dt$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a = 8\pi^2$ ,  $b = -4\pi$  のとき,  $0 < x < \frac{3}{2}\pi$  において  $f(x)$  が極値をとる  $x$  の値をすべて求めよ。
- (2) 次の条件 (B) を満たす  $a$ ,  $b$  を求めよ。
- (B)  $0 < x < \frac{3}{2}\pi$  において,  $f(x)$  は極値をとらない。

## 第 6 問

定数  $\alpha$  は実数でない複素数とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $\frac{\alpha - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$  は純虚数であることを示せ。
- (2) 純虚数  $\beta$  で、 $\frac{\beta - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$  が純虚数となるものがただ一つ存在することを示せ。
- (3) 複素数  $z$  を  $\frac{z - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$  が純虚数となるように動かすとき、 $|z|$  が最小となる  $z$  を  $\alpha$  を用いて表せ。