

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2023 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

第 1 問

曲線 $C: y = x - x^3$ 上の点 $A(1, 0)$ における接線を ℓ とし, C と ℓ の共有点のうち A とは異なる点を B とする。また, $-2 < t < 1$ とし, C 上の点 $P(t, t - t^3)$ をとる。さらに, 三角形 ABP の面積を $S(t)$ とする。

- (1) 点 B の座標を求めよ。
- (2) $S(t)$ を求めよ。
- (3) t が $-2 < t < 1$ の範囲を動くとき, $S(t)$ の最大値を求めよ。

第 2 問

α, β を実数とし, $\alpha > 1$ とする。曲線 $C_1: y = |x^2 - 1|$ と曲線 $C_2: y = -(x - \alpha)^2 + \beta$ が, 点 (α, β) と点 (p, q) の 2 点で交わるとする。また, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S_1 とし, x 軸, 直線 $x = \alpha$, および C_1 の $x \geq 1$ を満たす部分で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

- (1) p を α を用いて表し, $0 < p < 1$ であることを示せ。
- (2) S_1 を α を用いて表せ。
- (3) $S_1 > S_2$ であることを示せ。

第 3 問

座標空間内の原点 O を中心とする半径 r の球面 S 上に 4 つの頂点がある四面体 $ABCD$ が,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

を満たしているとする。また三角形 ABC の重心を G とする。

- (1) $\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OD}$ を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$ を r を用いて表せ。
- (3) 点 P が球面 S 上を動くとき, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$ の最大値を r を用いて表せ。さらに, 最大値をとるときの点 P に対して, $|\overrightarrow{PG}|$ を r を用いて表せ。

第 4 問

a, b を実数とし, $f(x) = x + a \sin x$, $g(x) = b \cos x$ とする。

(1) 定積分 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ を求めよ。

(2) 不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) + g(x)\}^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) 曲線 $y = |f(x) + g(x)|$, 2 直線 $x = -\pi$, $x = \pi$, および x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。このとき不等式

$$V \geq \frac{2}{3} \pi^2 (\pi^2 - 6)$$

が成り立つことを示せ。さらに, 等号が成立するときの a, b を求めよ。

第 5 問

$f(x) = x^{-2}e^x$ ($x > 0$) とし、曲線 $y = f(x)$ を C とする。また h を正の実数とする。さらに、正の実数 t に対して、曲線 C 、2 直線 $x = t$ 、 $x = t + h$ 、および x 軸で囲まれた図形の面積を $g(t)$ とする。

- (1) $g'(t)$ を求めよ。
- (2) $g(t)$ を最小にする t がただ 1 つ存在することを示し、その t を h を用いて表せ。
- (3) (2) で得られた t を $t(h)$ とする。このとき極限值 $\lim_{h \rightarrow +0} t(h)$ を求めよ。

第 6 問

i を虚数単位とする。複素数平面に関する以下の問いに答えよ。

- (1) 等式 $|z+2| = 2|z-1|$ を満たす点 z の全体が表す図形は円であることを示し、その円の中心と半径を求めよ。

- (2) 等式

$$\{|z+2| - 2|z-1|\}|z+6i| = 3\{|z+2| - 2|z-1|\}|z-2i|$$

を満たす点 z の全体が表す図形を S とする。このとき S を複素数平面上に図示せよ。

- (3) 点 z が (2) における図形 S 上を動くとき、 $w = \frac{1}{z}$ で定義される点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ。