

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2022年

試験時間：120分

問題数：6問

第 1 問

t, p を実数とし, $t > 0$ とする。 xy 平面において, 原点 O を中心とし点 $A(1, t)$ を通る円を C_1 とする。また, 点 A における C_1 の接線を ℓ とする。直線 $x = p$ を軸とする 2 次関数のグラフ C_2 は, x 軸と接し, 点 A において直線 ℓ とも接するとする。

- (1) 直線 ℓ の方程式を t を用いて表せ。
- (2) p を t を用いて表せ。
- (3) C_2 と x 軸の接点を M とし, C_2 と y 軸の交点を N とする。 t が正の実数全体を動くとき, 三角形 OMN の面積の最小値を求めよ。

第 2 問

整数 $a_1, a_2, a_3, \dots$ を, さいころをくり返し投げるにより, 以下のように定めていく。まず, $a_1 = 1$ とする。そして, 正の整数 n に対し, a_{n+1} の値を, n 回目に出たさいころの目に応じて, 次の規則で定める。

(規則) n 回目に出た目が 1, 2, 3, 4 なら $a_{n+1} = a_n$ とし, 5, 6 なら $a_{n+1} = -a_n$ とする。

たとえば, さいころを 3 回投げ, その出た目が順に 5, 3, 6 であったとすると, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$ となる。

$a_n = 1$ となる確率を p_n とする。ただし, $p_1 = 1$ とし, さいころのどの目も, 出る確率は $\frac{1}{6}$ であるとする。

- (1) p_2, p_3 を求めよ。
- (2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。
- (3) $p_n \leq 0.5000005$ を満たす最小の正の整数 n を求めよ。ただし, $0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ であることを用いてよい。

第 3 問

$0 < t < 1$ とする。平行四辺形 ABCD について、線分 AB, BC, CD, DA を $t : 1 - t$ に内分する点をそれぞれ A_1, B_1, C_1, D_1 とする。さらに、点 A_2, B_2, C_2, D_2 および A_3, B_3, C_3, D_3 を次の条件を満たすように定める。

(条件) $k = 1, 2$ について、点 $A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}, D_{k+1}$ は、それぞれ線分 $A_k B_k, B_k C_k, C_k D_k, D_k A_k$ を $t : 1 - t$ に内分する。

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{A_1 B_1} = p \vec{a} + q \vec{b}, \overrightarrow{A_1 D_1} = x \vec{a} + y \vec{b}$ を満たす実数 p, q, x, y を t を用いて表せ。
- (2) 四角形 $A_1 B_1 C_1 D_1$ は平行四辺形であることを示せ。
- (3) $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{A_3 B_3}$ が平行となるような t の値を求めよ。

第 4 問

$0 < a < 4$ とする。曲線

$$C_1 : y = 4 \cos^2 x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right),$$

$$C_2 : y = a - \tan^2 x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

は、ちょうど 2 つの共有点をもつとする。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

第 5 問

曲線 $C: y = (x+1)e^{-x}$ ($x > -1$) 上の点 P における法線と x 軸との交点を Q とする。点 P の x 座標を t とし、点 Q と点 $R(t, 0)$ との距離を $d(t)$ とする。

- (1) $d(t)$ を t を用いて表せ。
- (2) $x \geq 0$ のとき $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ であることを示せ。
- (3) 点 P が曲線 C 上を動くとき、 $d(t)$ の最大値を求めよ。

第 6 問

i は虚数単位とする。次の条件 (I), (II) をどちらも満たす複素数 z 全体の集合を S とする。

(I) z の虚部は正である。

(II) 複素数平面上の点 $A(1)$, $B(1 - iz)$, $C(z^2)$ は一直線上にある。

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 1 でない複素数 α について、 α の虚部が正であることは、 $\frac{1}{\alpha - 1}$ の虚部が負であるための必要十分条件であることを示せ。

(2) 集合 S を複素数平面上に図示せよ。

(3) $w = \frac{1}{z - 1}$ とする。 z が S を動くとき、 $\left| w + \frac{i}{\sqrt{2}} \right|$ の最小値を求めよ。