

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2021 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

第 1 問

xy 平面において 2 つの円

$$C_1 : x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 = 0,$$

$$C_2 : x^2 - 8x + y^2 - 4y + k = 0$$

が外接するとし、その接点を P とする。以下の問いに答えよ。

- (1) k の値を求めよ。
- (2) P の座標を求めよ。
- (3) 円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち点 P を通らないものは 2 本ある。これら 2 直線の交点 Q の座標を求めよ。

第 2 問

$t = \sin \theta + \cos \theta$ とし, θ は $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くものとする。

- (1) t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ と $\cos 4\theta$ を, それぞれ t を用いて表せ。
- (3) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \cos 4\theta$ であるとき, t の値をすべて求めよ。

第 3 問

O を原点とする座標空間において、3 点 $A(-2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を通る平面を α とする。2 点 $P(0, 5, 5)$, $Q(1, 1, 1)$ をとる。点 P を通り $\overrightarrow{OQ}$ に平行な直線を ℓ とする。直線 ℓ 上の点 R から平面 α に下ろした垂線と α の交点を S とする。 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ}$ (ただし k は実数) とおくとき、以下の問いに答えよ。

- (1) k を用いて、 $\overrightarrow{AS}$ を成分で表せ。
- (2) 点 S が $\triangle ABC$ の内部または周にあるような k の値の範囲を求めよ。

第 4 問

p, q を定数とし, $0 < p < 1$ とする。

曲線 $C_1 : y = px^{\frac{1}{p}} \ (x > 0)$ と,

曲線 $C_2 : y = \log x + q \ (x > 0)$

が, ある 1 点 (a, b) において同じ直線に接するとする。曲線 C_1 , 直線 $x = a$, 直線 $x = e^{-q}$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とする。また, 曲線 C_2 , 直線 $x = a$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

(1) q を p を用いて表せ。

(2) S_1, S_2 を p を用いて表せ。

(3) $\frac{S_2}{S_1} \geq \frac{3}{4}$ であることを示せ。ただし, $2.5 < e < 3$ を用いてよい。

第 5 問

O を原点とする xy 平面において、点 A $(-1, 0)$ と点 B $(2, 0)$ をとる。円 $x^2 + y^2 = 1$ の、 $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ を満たす部分を C とし、また点 B を通り y 軸に平行な直線を ℓ とする。2 以上の整数 n に対し、曲線 C 上に点 P, Q を

$$\angle POB = \frac{\pi}{n}, \quad \angle QOB = \frac{\pi}{2n}$$

を満たすようにとる。直線 AP と直線 ℓ の交点を V とし、直線 AQ と直線 ℓ の交点を W とする。線分 AP, 線分 AQ および曲線 C で囲まれた図形の面積を $S(n)$ とする。また線分 PV, 線分 QW, 曲線 C および線分 VW で囲まれた図形の面積を $T(n)$ とする。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n\{S(n) + T(n)\}$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n)}{S(n)}$ を求めよ。

第 6 問

i は虚数単位とする。複素数平面において、複素数 z の表す点 P を $P(z)$ または点 z と書く。 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおき、3 点 $A(1)$, $B(\omega)$, $C(\omega^2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ を考える。

- (1) $\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。
- (2) 点 z が辺 AC 上を動くとき、点 $-z$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。
- (3) 点 z が辺 AB 上を動くとき、点 z^2 が描く図形を E_1 とする。また、点 z が辺 AC 上を動くとき、点 z^2 が描く図形を E_2 とする。 E_1 と E_2 の共有点をすべて求めよ。