

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2020 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

第 1 問

xy 平面上の 3 点 $A(0, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の内接円を T とする。点 $D(0, -1)$ を通り、傾きが正である直線を $\ell: y = ax - 1$ とする。

- (1) 円 T の半径を r とする。 r を求めよ。
- (2) 直線 ℓ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点のうち、 D と異なる点を E とする。点 E の座標を a を用いて表せ。
- (3) 直線 ℓ が円 T に接するとする。このとき、(2) で求めた点 E を通り、 x 軸と平行な直線が、円 T に接することを示せ。

第 2 問

xy 平面において、円 $x^2 + y^2 = 1$ の $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ を満たす部分を C_1 とする。また、直線 $y = x$ の $x \leq 0$ を満たす部分を C_2 とする。 C_1 上の点 A, C_2 上の点 B および点 P $(-1, 0)$ について、 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ であるとする。点 A の座標を $(\cos \theta, \sin \theta)$ とする。ただし $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。

- (1) 点 B の x 座標を θ を用いて表せ。
- (2) 線分 AB の中点の x 座標が 0 以上であるような θ の範囲を求めよ。

第 3 問

O を原点とする xy 平面上に 2 直線

$$\ell : y = \sqrt{3}x, \quad m : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

がある。正の整数 n に対して、 ℓ 上に点 $P_n(n, \sqrt{3}n)$ をとり、 m 上に点 $Q_n\left(x_n, -\frac{1}{\sqrt{3}}x_n\right)$ をとる。ただし、 x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は次の条件 (I), (II) を満たすとする。

(I) $x_1 = 1$ である。

(II) $n \geq 2$ のとき、 x_n は、 Q_{n-1} を通り ℓ と平行な直線と、 x 軸との交点の x 座標である。

また、正の整数 n に対して、 $\triangle OP_n Q_n$ の面積を a_n とする。

(1) x_n を n を用いて表せ。

(2) a_n を n を用いて表せ。

(3) 正の整数 n に対して、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ と定める。 S_n を n を用いて表せ。

第 4 問

関数 $f(\theta)$, $g(\theta)$ を

$$f(\theta) = \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad g(\theta) = \sin 2\theta$$

と定める。 xy 平面上の曲線 C が, 媒介変数 θ を用いて

$$x = f(\theta), \quad y = g(\theta) \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

で表されている。

- (1) 次の定積分 I_1 , I_2 , I_3 の値を求めよ。

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \cos 2\theta \, d\theta, \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta \cos 2\theta \, d\theta$$

- (2) $\frac{dy}{dx}$ を θ の関数として表し, 曲線 C の概形を xy 平面上に描け。

- (3) 曲線 C , x 軸および y 軸で囲まれた図形を, y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

第 5 問

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \frac{c}{1+c}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。ただし、 c は正の実数である。

- (1) a_2, a_3 を求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$ を求めよ。

第 6 問

i は虚数単位とする。複素数 z に対して、その共役複素数を $\bar{z}$ で表す。複素数平面上で、次の等式を満たす点 z の全体が表す図形を C とする。

$$z\bar{z} + (1 + 3i)z + (1 - 3i)\bar{z} + 9 = 0$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 図形 C を複素数平面上に描け。
- (2) 複素数 w に対して、 $\alpha = w + \bar{w} - 1$, $\beta = w + \bar{w} + 1$ とする。 w , α , β が表す複素数平面上の点をそれぞれ P , A , B とする。点 P は C 上を動くとする。 $\triangle PAB$ の面積が最大となる複素数 w , およびそのときの $\triangle PAB$ の外接円の中心と半径を求めよ。