

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2019 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

第 1 問

$k > 0$, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ とする。放物線 $C: y = x^2 - kx$ と直線 $\ell: y = (\tan \theta)x$ の交点のうち、原点 O と異なるものを P とする。放物線 C の点 O における接線を ℓ_1 とし、点 P における接線を ℓ_2 とする。直線 ℓ_1 の傾きが $-\frac{1}{3}$ で、直線 ℓ_2 の傾きが $\tan 2\theta$ であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) k を求めよ。
- (2) $\tan \theta$ を求めよ。
- (3) 直線 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を Q とする。 $\angle PQO = \alpha$ (ただし $0 \leq \alpha \leq \pi$) とするとき、 $\tan \alpha$ を求めよ。

第 2 問

以下の問いに答えよ。

- (1) a, b, c, x, y, z, M は正の実数とする。 $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ がすべて M 以下のとき,

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} \leq M$$

であることを示せ。

- (2) $\log_2 5$ と $\log_3 5$ の大小を比較せよ。

- (3) n が正の整数のとき,

$$1 < \frac{1 + \log_2 5 + (\log_2 5)^n}{1 + \log_3 5 + (\log_3 5)^n} < 2^n$$

であることを示せ。

第 3 問

四面体 $OABC$ について、 $OA = OB = OC$ および $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$ が成り立つとする。 $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ を満たす実数 s, t に対し、辺 OA を $s : 1 - s$ に内分する点を D とし、辺 OB を $t : 1 - t$ に内分する点を E とする。 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{OC}$ となる点 F, G をとり、線分 EF と線分 DG が 1 点で交わるとし、その交点を P とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\angle AOB = \theta$ とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) $t = s$ であることを示し、 $\overrightarrow{OP}$ を s , $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{DG}$ であるとき、 $\cos \theta$ を s を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{DG}$ かつ $\sqrt{3}OP = OA$ であるとき、 s の値を求めよ。

第 4 問

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲において、関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = 1 + \sin x, \quad g(x) = -1 - \cos x$$

と定める。

- (1) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲において、 $|f(x)| = |g(x)|$ を満たす x を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$, 曲線 $y = g(x)$, 直線 $x = 0$ および直線 $x = \pi$ で囲まれる部分を,
 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

第 5 問

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $t > 0$ のとき, $1 \leq \frac{e^t - 1}{t} \leq e^t$ であることを示せ。

(2) 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ を

$$\begin{cases} x_n = \log(e^{a_n} + 1) \\ y_n = \log(e^{a_n} - 1) \\ z_n = y_n + \sum_{k=1}^n x_k \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。 z_n は n によらない定数であることを示せ。

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^{a_k} + 1}{2}\right)$ を求めよ。

第 6 問

$|z|^2 + 3 = 2(z + \bar{z})$ を満たす複素数 z 全体の集合を A とする。ただし $\bar{z}$ は z の共役複素数である。

- (1) 集合 A を複素数平面上に図示せよ。
- (2) A の要素 z の偏角を θ とする。ただし $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。 z が A を動くとき、 θ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) z^{50} が正の実数となる A の要素 z の個数を求めよ。