

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2018年

試験時間：120分

問題数：6問

第 1 問

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。放物線 $y = x^2$ 上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(\tan \theta, \tan^2 \theta)$, $B(-\tan \theta, \tan^2 \theta)$ をとる。三角形 OAB の内心の y 座標を p とし, 外心の y 座標を q とする。また, 正の実数 a に対して, 直線 $y = a$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ で表す。

- (1) p, q を $\cos \theta$ を用いて表せ。
- (2) $\frac{S(p)}{S(q)}$ が整数であるような $\cos \theta$ の値をすべて求めよ。

第 2 問

放物線 $C: y = x^2 + ax + b$ が 2 直線 $\ell_1: y = px$ ($p > 0$), $\ell_2: y = qx$ ($q < 0$) と接している。また, C と ℓ_1, ℓ_2 で囲まれた図形の面積を S とする。

- (1) a, b を p, q を用いてそれぞれ表せ。
- (2) S を p, q を用いて表せ。
- (3) ℓ_1, ℓ_2 が直交するように p, q が動くとき, S の最小値を求めよ。

第 3 問

正三角形 OAB に対し、直線 OA 上の点 $P_1, P_2, P_3, \dots$ および直線 OB 上の点 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ を、次の (I), (II), (III) を満たすようにとる。

(I) $P_1 = A$ である。

(II) 線分 $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \dots$ はすべて直線 OA に垂直である。

(III) 線分 $Q_1P_2, Q_2P_3, Q_3P_4, \dots$ はすべて直線 OB に垂直である。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。点 O を基準とする位置ベクトルが、整数 k, ℓ によって $k\vec{a} + \ell\vec{b}$ と表される点全体の集合を S とする。 n を自然数とすると、以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP_n}$ と $\overrightarrow{OQ_n}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OR} = x\vec{a} + y\vec{b}$ で定まる点 R が線分 Q_nP_{n+1} 上にあるとき、 x を y を用いて表せ。また、線分 Q_nP_{n+1} 上にある S の点の個数を求めよ。

(3) 三角形 $OP_{n+1}Q_n$ の周または内部にある S の点の個数を求めよ。

第 4 問

2つの曲線

$$C_1 : y = \frac{1}{\sqrt{2} \sin x} \quad (0 < x < \pi),$$

$$C_2 : y = \sqrt{2}(\sin x - \cos x) \quad (0 < x < \pi)$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点の x 座標を求めよ。
- (2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V が π^2 であることを示せ。

第 5 問

$f(x) = \int_0^x \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt$ とし, $c \geq \pi$ とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = c$, $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める。

- (1) $f(\pi)$ を求めよ。また, $x \geq \pi$ のとき, $0 < f'(x) \leq \frac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ。
- (2) すべての自然数 n に対して, $a_n \geq \pi$ が成り立つことを示せ。
- (3) すべての自然数 n に対して, $|a_{n+1} - \pi| \leq \frac{2}{\pi}|a_n - \pi|$ が成り立つことを示せ。また, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

第 6 問

複素数 α に対して、複素数平面上の 3 点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\alpha^2)$ を考える。次の条件 (I), (II), (III) をすべて満たす複素数 α 全体の集合を S とする。

- (I) α は実数でも純虚数でもない。
- (II) $|\alpha| > 1$ である。
- (III) 三角形 OAB は直角三角形である。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) α が S に属するとき、 $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ。
- (2) 集合 S を複素数平面に図示せよ。
- (3) x, y を $\alpha^2 = x + yi$ を満たす実数とする。 α が S を動くとき、 xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求め、図示せよ。