

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2017年

試験時間：120分

問題数：6問

第 1 問

a を正の実数とする。2 つの関数

$$y = \frac{1}{3}ax^2 - 2a^2x + \frac{7}{3}a^3, \quad y = -\frac{2}{3}ax^2 + 2a^2x - \frac{2}{3}a^3$$

のグラフは、2 点 A, B で交わる。但し、A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。
また、2 点 A, B を結ぶ線分の垂直二等分線を ℓ とする。

- (1) 2 点 A, B の座標を a を用いて表せ。
- (2) 直線 ℓ の方程式を a を用いて表せ。
- (3) 原点と直線 ℓ の距離 d を a を用いて表せ。また、 $a > 0$ の範囲で d を最大にする a の値を求めよ。

第 2 問

a, b, c を実数とし, β, m をそれぞれ $0 < \beta < 1, m > 0$ を満たす実数とする。また, 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は $x = \beta, -\beta$ で極値をとり, $f(-1) = f(\beta) = -m$, $f(1) = f(-\beta) = m$ を満たすとする。

- (1) a, b, c , および β, m の値を求めよ。
- (2) 関数 $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ は, $-1 \leq x \leq 1$ に対して $f(-1) \leq g(x) \leq f(1)$ を満たすとする。 $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくとき, $h(-1), h(-\beta), h(\beta), h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより, $h(x)$ を求めよ。

第 3 問

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3a_n^2 + a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たすとする。また, $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $b_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) を示せ。
- (2) b_n ($n = 1, 2, \dots$) の一の位の数 $が 2$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。
- (3) a_{2017} の一の位の数 $を求めよ。$

第 4 問

関数

$$f(x) = 2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} \quad (x > 0)$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ のすべての極値を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

第 5 問

xy 平面において, x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また, 実数 a に対して, a 以下の最大の整数を $[a]$ で表す。記号 $[\]$ をガウス記号という。以下の問いでは N を自然数とする。

- (1) n を $0 \leq n \leq N$ を満たす整数とする。点 $(n, 0)$ と点 $\left(n, N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right)$ を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。
- (2) 直線 $y = x$ と, x 軸, および直線 $x = N$ で囲まれた領域 (境界を含む) にある格子点の個数を $A(N)$ とおく。このとき $A(N)$ を求めよ。
- (3) 曲線 $y = N \sin\left(\frac{\pi x}{2N}\right)$ ($0 \leq x \leq N$) と, x 軸, および直線 $x = N$ で囲まれた領域 (境界を含む) にある格子点の個数を $B(N)$ とおく。(2) の $A(N)$ に対して $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B(N)}{A(N)}$ を求めよ。

第 6 問

$0 < a < \frac{\pi}{2}$ とする。複素数平面上において、原点を中心とする半径 1 の円の上に異なる 5 点 $P_1(w_1)$, $P_2(w_2)$, $P_3(w_3)$, $P_4(w_4)$, $P_5(w_5)$ が反時計まわりに並んでおり、次の 2 つの条件 (I), (II) を満たすとする。

(I) $(\cos^2 a)(w_2 - w_1)^2 + (\sin^2 a)(w_5 - w_1)^2 = 0$ が成り立つ。

(II) $\frac{w_3}{w_2}$ と $-\frac{w_4}{w_2}$ は方程式 $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ の解である。

また、五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の頂点 P_1 における内角 $\angle P_5P_1P_2$ を求めよ。
- (2) S を a を用いて表せ。
- (3) $R = |w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5|$ とする。このとき、 $R^2 + 2S$ は a の値によらないことを示せ。