

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2016 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

第 1 問

k を実数とする。 xy 平面の曲線 $C_1: y = x^2$ と $C_2: y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ が異なる共有点 P, Q を持つとする。ただし点 P, Q の x 座標は正であるとする。また、原点を O とする。

- (1) k のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) k が (1) の範囲を動くとき、 $\triangle OPQ$ の重心 G の軌跡を求めよ。
- (3) $\triangle OPQ$ の面積を S とするとき、 S^2 を k を用いて表せ。
- (4) k が (1) の範囲を動くとする。 $\triangle OPQ$ の面積が最大となるような k の値と、そのときの重心 G の座標を求めよ。

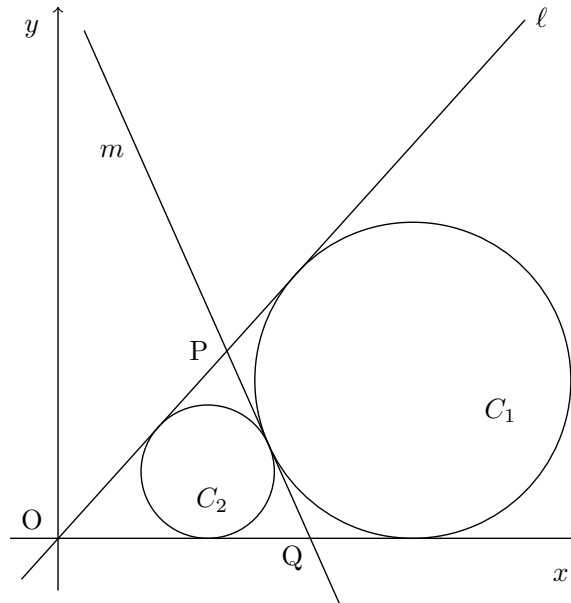
第 2 問

xy 平面の直線 $y = (\tan 2\theta)x$ を ℓ とする。ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ とする。図で示すように、円 C_1 , C_2 を以下の (i)~(iv) で定める。

- (i) 円 C_1 は直線 ℓ および x 軸の正の部分と接する。
- (ii) 円 C_1 の中心は第 1 象限にあり、原点 O から中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である。
- (iii) 円 C_2 は直線 ℓ , x 軸の正の部分, および円 C_1 と接する。
- (iv) 円 C_2 の中心は第 1 象限にあり、原点 O から中心までの距離 d_2 は $d_1 > d_2$ を満たす。

円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち, x 軸, 直線 ℓ と異なる直線を m とし, 直線 m と直線 ℓ , x 軸との交点をそれぞれ P , Q とする。

- (1) 円 C_1 , C_2 の半径を $\sin \theta$, $\cos \theta$ を用いて表せ。
- (2) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき, 線分 PQ の長さの最大値を求めよ。
- (3) (2) の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ。



第 3 問

四面体 OABC において, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。このとき等式

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1$$

が成り立つとする。 t は実数の定数で, $0 < t < 1$ を満たすとする。線分 OA を $t : 1 - t$ に内分する点を P とし, 線分 BC を $t : 1 - t$ に内分する点を Q とする。また, 線分 PQ の中点を M とする。

- (1) $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と t を用いて表せ。
- (2) 線分 OM と線分 BM の長さが等しいとき, 線分 OB の長さを求めよ。
- (3) 4 点 O, A, B, C が点 M を中心とする同一球面上にあるとする。このとき, $\triangle OAB$ と $\triangle OCB$ は合同であることを示せ。

第 4 問

関数 $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$ ($x \geq 0$) について次の問いに答えよ。

- (1) $f'(a) = 0$, $f''(b) = 0$ を満たす a , b を求め, $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}e^{-x} = 0$ であることは証明なしで用いてよい。
- (2) $k \geq 0$ のとき $V(k) = \int_0^k xe^{-2x}dx$ を k を用いて表せ。
- (3) (1) で求めた a , b に対して曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

第 5 問

$\triangle PQR$ において $\angle RPQ = \theta$, $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$ とする。点 P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次で定める。

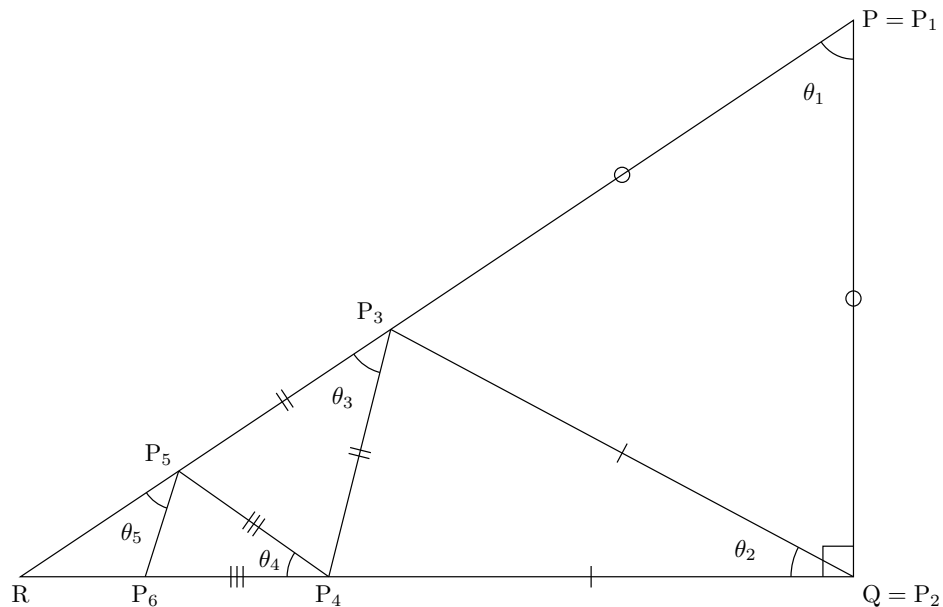
$$P_1 = P, \quad P_2 = Q, \quad P_n P_{n+2} = P_n P_{n+1}$$

ただし、点 P_{n+2} は線分 $P_n R$ 上にあるものとする。実数 θ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$\theta_n = \angle P_{n+1} P_n P_{n+2} \quad (0 < \theta_n < \pi)$$

で定める。

- (1) θ_2, θ_3 を θ を用いて表せ。
- (2) $\theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は n によらない定数であることを示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$ を求めよ。



第 6 問

複素数平面上を動く点 z を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 等式 $|z - 1| = |z + 1|$ を満たす点 z の全体は虚軸であることを示せ。
- (2) 点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき、 $w = \frac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から 1 点を除いたものとなる。この図形を描け。
- (3) a を正の実数とする。点 z が虚軸上を動くとき、 $w = \frac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から 1 点を除いたものとなる。この円の中心と半径を求めよ。