

# 入学試験過去問題

## 数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2015 年

試験時間：120 分

問題数：7 問

## 第 1 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 座標平面において、次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x^2 + y \leq 1 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$$

- (2) 2つの放物線  $y = x^2 - 2x + k$  と  $y = -x^2 + 1$  が共有点をもつような実数  $k$  の値の範囲を求めよ。
- (3)  $x, y$  が (1) の連立不等式を満たすとき、 $y - x^2 + 2x$  の最大値および最小値と、それらを与える  $x, y$  の値を求めよ。

## 第 2 問

半径 1 の円を内接円とする三角形 ABC が、辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形であるとする。辺 BC, CA, AB と内接円の接点をそれぞれ P, Q, R とする。また、 $\alpha = \angle CAB$ ,  $\beta = \angle ABC$  とし、三角形 ABC の面積を  $S$  とする。

- (1) 線分 AQ の長さを  $\alpha$  を用いて表し、線分 QC の長さを  $\beta$  を用いて表せ。
- (2)  $t = \tan \frac{\beta}{2}$  とおく。このとき、 $S$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3) 不等式  $S \geq 3\sqrt{3}$  が成り立つことを示せ。さらに、等号が成立するのは、三角形 ABC が正三角形のときに限ることを示せ。

### 第 3 問

$p$  と  $q$  は正の整数とする。2 次方程式  $x^2 - 2px - q = 0$  の 2 つの実数解を  $\alpha, \beta$  とする。ただし  $\alpha > \beta$  とする。数列  $\{a_n\}$  を

$$a_n = \frac{1}{2}(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。ただし  $\alpha^0 = 1, \beta^0 = 1$  と定める。

- (1) すべての自然数  $n$  に対して、 $a_{n+2} = 2pa_{n+1} + qa_n$  であることを示せ。
- (2) すべての自然数  $n$  に対して、 $a_n$  は整数であることを示せ。
- (3) 自然数  $n$  に対し、 $\frac{\alpha^{n-1}}{2}$  以下の最大の整数を  $b_n$  とする。 $p$  と  $q$  が  $q < 2p + 1$  を満たすとき、 $b_n$  を  $a_n$  を用いて表せ。

## 第 4 問

$f(x) = \log(e^x + e^{-x})$  とおく。曲線  $y = f(x)$  の点  $(t, f(t))$  における接線を  $\ell$  とする。直線  $\ell$  と  $y$  軸の交点の  $y$  座標を  $b(t)$  とおく。

- (1) 次の等式を示せ。

$$b(t) = \frac{2te^{-t}}{e^t + e^{-t}} + \log(1 + e^{-2t})$$

- (2)  $x \geq 0$  のとき,  $\log(1 + x) \leq x$  であることを示せ。

- (3)  $t \geq 0$  のとき,

$$b(t) \leq \frac{2}{e^t + e^{-t}} + e^{-2t}$$

であることを示せ。

- (4)  $b(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{4t}{(e^t + e^{-t})^2} dt$  であることを示せ。

## 第 5 問

$f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  を

$$f(x) = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$h(x) = \sin x$$

とおく。3つの曲線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $y = h(x)$  の  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  を満たす部分を, それぞれ  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  とする。

- (1)  $C_2$  と  $C_3$  の交点の座標を求めよ。
- (2)  $C_1$  と  $C_3$  の交点の  $x$  座標を  $a$  とする。 $\sin a$ ,  $\cos a$  の値を求めよ。
- (3)  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  によって囲まれる図形の面積を求めよ。

## 第 6 問

$\alpha$  を実数でない複素数とし、 $\beta$  を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし、複素数  $w$  に対してその共役複素数を  $\overline{w}$  で表す。

- (1) 複素数平面上で、関係式  $\alpha z + \overline{\alpha} z = |z|^2$  を満たす複素数  $z$  の描く図形を  $C$  とする。このとき、 $C$  は原点を通る円であることを示せ。
- (2) 複素数平面上で、 $(z - \alpha)(\beta - \overline{\alpha})$  が純虚数となる複素数  $z$  の描く図形を  $L$  とする。 $L$  は (1) で定めた  $C$  と 2 つの共有点をもつことを示せ。また、その 2 点を  $P, Q$  とするとき、線分  $PQ$  の長さを  $\alpha$  と  $\overline{\alpha}$  を用いて表せ。
- (3)  $\beta$  の表す複素数平面上的点を  $R$  とする。(2) で定めた点  $P, Q$  と点  $R$  を頂点とする三角形が正三角形であるとき、 $\beta$  を  $\alpha$  と  $\overline{\alpha}$  を用いて表せ。

## 第 7 問

$\alpha, \beta$  は異なる 2 つの実数とする。座標平面において 2 点  $(\alpha, 1), (\beta, 1)$  をそれぞれ点  $(\alpha^2, \alpha), (\beta^2, \beta)$  に移す 1 次変換を表す行列を  $A$  とする。自然数  $n$  に対し, 点  $P_n(x_n, y_n)$  を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

- (1)  $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  とおくと  $AQ = Q \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  となることを示せ。
- (2) 数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$  の一般項を求めよ。
- (3) 点  $P_2, P_3, P_4, \dots$  がすべて直線  $y = \frac{1}{2}x$  上にあるような  $\alpha, \beta$  を 1 組求め, そのときの行列  $A$  を求めよ。