

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2014 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

第 1 問

$f(x) = x^3 - x$ とする。 $y = f(x)$ のグラフに点 $P(a, b)$ から引いた接線は 3 本あるとする。3 つの接点 $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, $C(\gamma, f(\gamma))$ を頂点とする三角形の重心を G とする。

- (1) $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ および $\alpha\beta\gamma$ を a, b を用いて表せ。
- (2) 点 G の座標を a, b を用いて表せ。
- (3) 点 G の x 座標が正で, y 座標が負となるような点 P の範囲を図示せよ。

第 2 問

xy 平面上の曲線 $C: y = x \sin x + \cos x - 1$ ($0 < x < \pi$) に対して、以下の問いに答えよ。ただし $3 < \pi < \frac{16}{5}$ であることは証明なしで用いてよい。

- (1) 曲線 C と x 軸の交点はただ 1 つであることを示せ。
- (2) 曲線 C と x 軸の交点を $A(\alpha, 0)$ とする。 $\alpha > \frac{2}{3}\pi$ であることを示せ。
- (3) 曲線 C , y 軸および直線 $y = \frac{\pi}{2} - 1$ で囲まれる部分の面積を S とする。また, xy 平面の原点 O , 点 A および曲線 C 上の点 $B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - 1\right)$ を頂点とする三角形 OAB の面積を T とする。 $S < T$ であることを示せ。

第 3 問

関数 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ を $x > 0$ で考える。 $y = f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線を ℓ_a とし、 ℓ_a と y 軸との交点を $(0, Y(a))$ とする。以下の問いに答えよ。ただし、実数 k に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{-t} = 0$ であることは証明なしで用いてよい。

- (1) $Y(a)$ がとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $0 < a < b$ である a, b に対して、 ℓ_a と ℓ_b が x 軸上で交わる時、 a のとりうる値の範囲を求め、 b を a で表せ。
- (3) (2) の a, b に対して、 $Z(a) = Y(a) - Y(b)$ とおく。 $\lim_{a \rightarrow +0} Z(a)$ および $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{Z'(a)}{a}$ を求めよ。

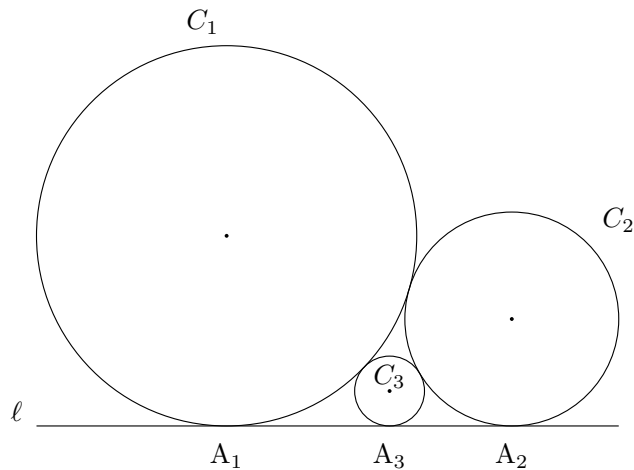
第 4 問

平面上の直線 ℓ に同じ側で接する 2 つの円 C_1, C_2 があり, C_1 と C_2 も互いに外接している。 ℓ, C_1, C_2 で囲まれた領域内に, これら 3 つと互いに接する円 C_3 を作る。同様に ℓ, C_n, C_{n+1} ($n = 1, 2, 3, \dots$) で囲まれた領域内にあり, これら 3 つと互いに接する円を C_{n+2} とする。円 C_n の半径を r_n とし, $x_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおく。このとき, 以下の問いに答えよ。ただし, $r_1 = 16, r_2 = 9$ とする。

- (1) ℓ が C_1, C_2, C_3 と接する点を, それぞれ A_1, A_2, A_3 とおく。線分 A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 の長さおよび r_3 の値を求めよ。
- (2) ある定数 a, b に対して $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) となることを示せ。 a, b の値も求めよ。
- (3) (2) で求めた a, b に対して, 2 次方程式 $t^2 = at + b$ の解を α, β ($\alpha > \beta$) とする。 $x_1 = c\alpha^2 + d\beta^2$ を満たす有理数 c, d の値を求めよ。ただし, $\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい。
- (4) (3) の c, d, α, β に対して,

$$x_n = c\alpha^{n+1} + d\beta^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となることを示し, 数列 $\{r_n\}$ の一般項を α, β を用いて表せ。



第 5 問

実数を成分とする正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) $AB = BA$ を満たす A は、実数 x, y を用いて $A = xB + yE$ と表せることを示せ。

(2) $A^3 = E$ のとき

$$(t^2 - \Delta)A = (t\Delta + 1)E$$

を示せ。ただし、 $t = a + d$, $\Delta = ad - bc$ とする。

(3) $AB = BA$ かつ $A^3 = E$ を満たす A をすべて求めよ。

第 6 問

xy 平面上に楕円

$$C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (a > \sqrt{13})$$

および双曲線

$$C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > 0)$$

があり, C_1 と C_2 は同一の焦点をもつとする。また C_1 と C_2 の交点 $P \left(2\sqrt{1 + \frac{t^2}{b^2}}, t \right)$ ($t > 0$) における C_1 , C_2 の接線をそれぞれ ℓ_1 , ℓ_2 とする。

- (1) a と b の間に成り立つ関係式を求め, 点 P の座標を a を用いて表せ。
- (2) ℓ_1 と ℓ_2 が直交することを示せ。
- (3) a が $a > \sqrt{13}$ を満たしながら動くときの点 P の軌跡を図示せよ。