

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2013 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

第 1 問

$f(x)$, $g(t)$ を

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - x^2 - 2x + 1 \\g(t) &= \cos 3t - \cos 2t + \cos t\end{aligned}$$

とおく。

- (1) $2g(t) - 1 = f(2 \cos t)$ が成り立つことを示せ。
- (2) $\theta = \frac{\pi}{7}$ のとき, $2g(\theta) \cos \theta = 1 + \cos \theta - 2g(\theta)$ が成り立つことを示せ。
- (3) $2 \cos \frac{\pi}{7}$ は 3 次方程式 $f(x) = 0$ の解であることを示せ。

第 2 問

n は自然数とする。

- (1) $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t \, dt = (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2 - 1} \left(\cos \frac{k}{2n} \pi + \cos \frac{k-1}{2n} \pi \right)$$

が成り立つことを示せ。

- (2) 媒介変数 t によって

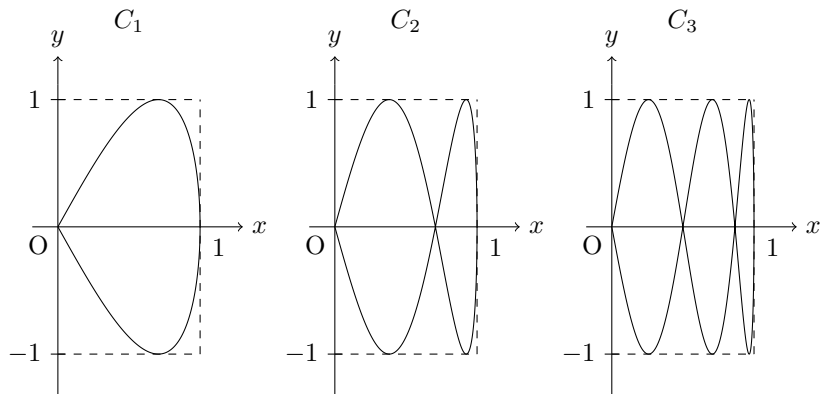
$$x = \sin t, \quad y = \sin 2nt \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ。ただし必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k}{2n} \pi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4n}} - 1 \right) \quad (n \geq 2)$$

を用いてよい。

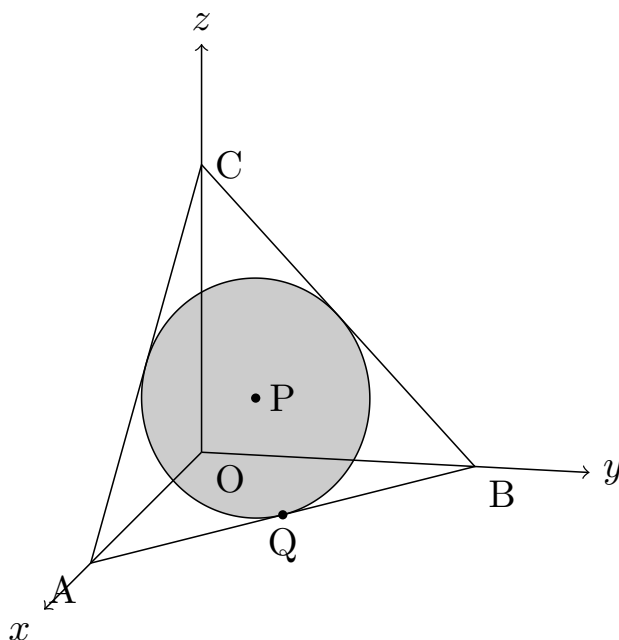
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。



第 3 問

xyz 空間において、点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を通る平面上にあり、正三角形 ABC に内接する円板を D とする。円板 D の中心を P 、円板 D と辺 AB の接点を Q とする。

- (1) 点 P と点 Q の座標を求めよ。
- (2) 円板 D が平面 $z = t$ と共有点をもつ t の範囲を求めよ。
- (3) 円板 D と平面 $z = t$ の共通部分が線分であるとき、その線分の長さを t を用いて表せ。
- (4) 円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。



第 4 問

3つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -b_n - c_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_{n+1} &= -c_n - a_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ c_{n+1} &= -a_n - b_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

および $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$ を満たすとする。ただし, a , b , c は定数とする。

- (1) $p_n = a_n + b_n + c_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で与えられる数列 $\{p_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $q_n = (-1)^n \{(a_n)^2 + (b_n)^2 + (c_n)^2\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で与えられる数列 $\{q_n\}$ の初項から第 $2n$ 項までの和を T_n とする。 $a + b + c$ が奇数であれば, すべての自然数 n に対して T_n が正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

第 5 問

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。ただし, a, b, c, d は実数とする。

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A は存在しないことを示せ。

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A をすべて求めよ。

(3) (2) で求めた A のそれぞれについて $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2013}$ を求めよ。

第 6 問

楕円 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ の、直線 $y = mx$ と平行な 2 接線を ℓ_1, ℓ'_1 とし、 ℓ_1, ℓ'_1 に直交する C の 2 接線を ℓ_2, ℓ'_2 とする。

- (1) ℓ_1, ℓ'_1 の方程式を m を用いて表せ。
- (2) ℓ_1 と ℓ'_1 の距離 d_1 および ℓ_2 と ℓ'_2 の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。ただし、平行な 2 直線 ℓ, ℓ' の距離とは、 ℓ 上の 1 点と直線 ℓ' の距離である。
- (3) $(d_1)^2 + (d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。
- (4) $\ell_1, \ell'_1, \ell_2, \ell'_2$ で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。さらに m が変化するとき、 S の最大値を求めよ。