

# 入学試験過去問題

## 数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2012年

試験時間：120分

問題数：6問

## 第 1 問

$x$  の方程式  $|\log_{10} x| = px + q$  ( $p, q$  は実数) が 3 つの相異なる正の解をもち、次の 2 つの条件を満たすとする。

(I) 3 つの解の比は、 $1 : 2 : 3$  である。

(II) 3 つの解のうち最小のものは、 $\frac{1}{2}$  より大きく、 $1$  より小さい。

このとき、 $A = \log_{10} 2$ ,  $B = \log_{10} 3$  とおき、 $p$  と  $q$  を  $A$  と  $B$  を用いて表せ。

## 第 2 問

曲線  $C: y = \frac{1}{x+2}$  ( $x > -2$ ) を考える。曲線  $C$  上の点  $P_1 \left(0, \frac{1}{2}\right)$  における接線を  $\ell_1$  とし、 $\ell_1$  と  $x$  軸との交点を  $Q_1$ 、点  $Q_1$  を通り  $x$  軸と垂直な直線と曲線  $C$  との交点を  $P_2$  とおく。以下同様に、自然数  $n$  ( $n \geq 2$ ) に対して、点  $P_n$  における接線を  $\ell_n$  とし、 $\ell_n$  と  $x$  軸との交点を  $Q_n$ 、点  $Q_n$  を通り  $x$  軸と垂直な直線と曲線  $C$  との交点を  $P_{n+1}$  とおく。

- (1)  $\ell_1$  の方程式を求めよ。
- (2)  $P_n$  の  $x$  座標を  $x_n$  ( $n \geq 1$ ) とする。 $x_{n+1}$  を  $x_n$  を用いて表し、 $x_n$  を  $n$  を用いて表せ。
- (3)  $\ell_n$ ,  $x$  軸,  $y$  軸で囲まれる三角形の面積  $S_n$  を求め、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。

### 第 3 問

曲線  $C: y = \log x$  ( $x > 0$ ) を考える。自然数  $n$  に対して、曲線  $C$  上に点  $P(e^n, n)$ ,  $Q(e^{2n}, 2n)$  をとり、 $x$  軸上に点  $A(e^n, 0)$ ,  $B(e^{2n}, 0)$  をとる。四角形  $APQB$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を  $V(n)$  とする。また、線分  $PQ$  と曲線  $C$  で囲まれる部分を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を  $S(n)$  とする。

(1)  $V(n)$  を  $n$  の式で表せ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{V(n)}$  を求めよ。

## 第 4 問

四面体 OABC において、次が満たされているとする。

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$$

点 A, B, C を通る平面を  $\alpha$  とする。点 O を通り平面  $\alpha$  と直交する直線と、平面  $\alpha$  との交点を H とする。

- (1)  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{BC}$  は垂直であることを示せ。
- (2) 点 H は  $\triangle ABC$  の垂心であること、すなわち  $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$  を示せ。
- (3)  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 2$ ,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 1$  とする。このとき、 $\triangle ABC$  の各辺の長さおよび線分 OH の長さを求めよ。

## 第 5 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 座標平面において原点のまわりに角  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) だけ回転する移動を表す行列を  $A$  とする。 $A$  が等式  $A^2 - A + E = O$  を満たすとき、 $\theta$  と  $A$  を求めよ。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  である。
- (2) 直線  $y = \sqrt{3}x$  に関する対称移動を表す行列  $B$  を求めよ。
- (3) 直線  $y = kx$  に関する対称移動を表す行列を  $C$  とする。(1), (2) において求めた行列  $A$ ,  $B$  に対して  $BC = A$  が成り立つとき、 $k$  を求めよ。

## 第 6 問

2つの双曲線  $C: x^2 - y^2 = 1$ ,  $H: x^2 - y^2 = -1$  を考える。双曲線  $H$  上の点  $P(s, t)$  に対して、方程式  $sx - ty = 1$  で定まる直線を  $\ell$  とする。

- (1) 直線  $\ell$  は点  $P$  を通らないことを示せ。
- (2) 直線  $\ell$  と双曲線  $C$  は異なる 2 点  $Q, R$  で交わることを示し、 $\triangle PQR$  の重心  $G$  の座標を  $s, t$  を用いて表せ。
- (3) (2) における 3 点  $G, Q, R$  に対して、 $\triangle GQR$  の面積は点  $P(s, t)$  の位置によらず一定であることを示せ。