

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2011 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

第 1 問

O を原点とする xy 平面において、直線 $y = 1$ の $|x| \geq 1$ を満たす部分を C とする。

- (1) C 上に点 $A(t, 1)$ をとるとき、線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ。
- (2) 点 A が C 全体を動くとき、線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め、それを図示せよ。

第 2 問

自然数 n に対し、関数

$$F_n(x) = \int_x^{2x} e^{-t^n} dt \quad (x \geq 0)$$

を考える。

- (1) 関数 $F_n(x)$ ($x \geq 0$) はただ一つの点で最大値をとることを示し、 $F_n(x)$ が最大となるような x の値 a_n を求めよ。
- (2) (1) で求めた a_n に対し、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n$ を求めよ。

第 3 問

α を $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。円 $C : x^2 + (y + \sin \alpha)^2 = 1$ および、その中心を通る直線 $\ell : y = (\tan \alpha)x - \sin \alpha$ を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と円 C の 2 つの交点の座標を α を用いて表せ。

(2) 等式

$$2 \int_{\cos \alpha}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} y \leq (\tan \alpha)x - \sin \alpha \\ x^2 + (y + \sin \alpha)^2 \leq 1 \end{cases}$$

の表す xy 平面上の図形を D とする。図形 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

第 4 問

数列 $\{a_n\}$ を,

$$a_1 = 1,$$
$$(n+3)a_{n+1} - na_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

- (1) $b_n = n(n+1)(n+2)a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

- (2) 等式

$$p(n+1)(n+2) + qn(n+2) + rn(n+1) = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つように、定数 p, q, r の値を定めよ。

- (3) $\sum_{k=1}^n a_k$ を n の式で表せ。

第 5 問

実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。座標平面上の 2 点 $P(x, y)$, $Q(u, v)$ について等式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき、行列 A により点 P は点 Q に移るという。

点 $(1, 3)$ は行列 A により点 $(10, 10)$ に移り、さらに等式

$$A^2 - 7A + 10E = O$$

が成り立つものとする。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 行列 A により点 $(10, 10)$ が移る点の座標を求めよ。
- (2) 実数 a, b, c, d の値を求めよ。
- (3) 次の条件 (*) を満たす直線 ℓ の方程式を求めよ。

(*) 直線 ℓ 上のすべての点が行列 A により ℓ 上の点に移る。

第 6 問

d を正の定数とする。2 点 $A(-d, 0)$, $B(d, 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。点 A , 点 B , 原点 O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP , BP , OP と書く。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ。
- (2) $AP^2 + BP^2$ および $AP \cdot BP$ を, OP と d を用いて表せ。
- (3) 点 P が楕円 E 全体を動くとき, $AP^3 + BP^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ。