

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2010 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

第 1 問

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2$ とおく。ただし $a > 0$ とする。

- (1) $f(-1) \leq f(3)$ となる a の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下となる a の範囲を求めよ。
- (3) $-1 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

第 2 問

3つの曲線

$$C_1 : y = \sin x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C_2 : y = \cos x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C_3 : y = \tan x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 の交点, C_2 と C_3 の交点, C_3 と C_1 の交点のそれぞれについて y 座標を求めよ。
- (2) C_1 , C_2 , C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。

第 3 問

n を自然数とし, 1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 単調に増加する連続関数 $f(x)$ に対して, 不等式 $\int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k)$ を示せ。
- (2) 不等式 $\int_1^n \log x dx \leq \log n!$ を示し, 不等式 $n^n e^{1-n} \leq n!$ を導け。
- (3) $x \geq 0$ に対して, 不等式 $x^n e^{1-x} \leq n!$ を示せ。

第 4 問

点 O を原点とする座標平面上に、2 点 $A(1, 0)$, $B(\cos \theta, \sin \theta)$ ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) をとり、以下の条件をみたす 2 点 C, D を考える。

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 1$$

また、 $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OCD$ の面積を S_2 とおく。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ の成分を求めよ。
- (2) $S_2 = 2S_1$ が成り立つとき、 θ と S_1 の値を求めよ。
- (3) $S = 4S_1 + 3S_2$ を最小にする θ と、そのときの S の値を求めよ。

第 5 問

a を実数とし, $A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{pmatrix}$ とする。2 点 $P(x, y)$, $Q(X, Y)$ について

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき, P は A により Q に移るという。

- (1) 原点以外の点で, A によりそれ自身に移るものが存在するとき, a を求めよ。
- (2) 次の条件 (*) をみたす a, k を求めよ。
(*) 直線 $\ell: y = kx + 1$ 上のすべての点は, A により ℓ 上の点に移る。
- (3) (*) をみたす a, k に対し, 直線 ℓ 上の点で, A によりそれ自身に移るものを求めよ。

第 6 問

直線 $\ell : mx + ny = 1$ が, 楕円 $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) に接しながら動くとする。

- (1) 点 (m, n) の軌跡は楕円になることを示せ。
- (2) C の焦点 $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と ℓ との距離を d_1 とし, もう 1 つの焦点 $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と ℓ との距離を d_2 とする。このとき $d_1 d_2 = b^2$ を示せ。