

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2009 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

第 1 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ を示せ。
- (2) $2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ。
- (3) $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos \alpha)(x - 2\cos \beta)$ となる角度 α, β を求めよ。ただし $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ とする。

第 2 問

xyz 空間内において, yz 平面上で放物線 $z = y^2$ と直線 $z = 4$ で囲まれる平面図形を D とする。点 $(1, 1, 0)$ を通り z 軸に平行な直線を ℓ とし, ℓ のまわりに D を 1 回転させてできる立体を E とする。

- (1) D と平面 $z = t$ との交わりを D_t とする。ただし $0 \leq t \leq 4$ とする。点 P が D_t 上を動くとき, 点 P と点 $(1, 1, t)$ との距離の最大値, 最小値を求めよ。
- (2) 平面 $z = t$ による E の切り口の面積 $S(t)$ ($0 \leq t \leq 4$) を求めよ。
- (3) E の体積 V を求めよ。

第 3 問

$f(x)$ を整式で表される関数とし, $g(x) = \int_0^x e^t f(t) dt$ とおく。任意の実数 x について

$$x(f(x) - 1) = 2 \int_0^x e^{-t} g(t) dt$$

が成り立つとする。

- (1) $xf''(x) + (x+2)f'(x) - f(x) = 1$ が成り立つことを示せ。
- (2) $f(x)$ は定数または 1 次式であることを示せ。
- (3) $f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。

第 4 問

自然数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は

$$(5 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする。

- (1) $\sqrt{2}$ は無理数であることを示せ。
- (2) a_{n+1} , b_{n+1} を a_n , b_n を用いて表せ。
- (3) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} + pb_{n+1} = q(a_n + pb_n)$ が成り立つような定数 p , q を 2 組求めよ。
- (4) a_n , b_n を n を用いて表せ。

第 5 問

実数 a に対し、行列 $A = \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & 1-a \end{pmatrix}$ を考える。 n を自然数とし、座標平面上において、行列 A^n により点 $(1, 0)$ が点 P_n に移り、点 $(0, 1)$ が点 Q_n に移るものとする。2 点 P_n, Q_n の間の距離を P_nQ_n で表す。

- (1) P_1Q_1 を求めよ。
- (2) A^n を a と n を用いて表せ。
- (3) n が固定され、 a が実数全体を動くとき、 P_nQ_n の最小値を求めよ。

第 6 問

点 $P(x, y)$ が双曲線 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上を動くとき、点 $P(x, y)$ と点 $A(a, 0)$ との距離の最小値を $f(a)$ とする。

- (1) $f(a)$ を a で表せ。
- (2) $f(a)$ を a の関数とみなすとき、 ab 平面上に曲線 $b = f(a)$ の概形をかけ。