

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2008 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

第 1 問

p, q を正の実数とする。 x の方程式

$$\log_{10}(px) \cdot \log_{10}(qx) + 1 = 0$$

が 1 より大きい解をもつとき、点 $(\log_{10} p, \log_{10} q)$ の存在する範囲を座標平面上に図示せよ。

第 2 問

xyz 空間内の点 $P(1, 0, 1)$ と, xy 平面上の円 $C : x^2 + (y - 2)^2 = 1$ に属する点 $Q(\cos \theta, 2 + \sin \theta, 0)$ を考える。

- (1) 直線 PQ と平面 $z = t$ の交点の座標を (α, β, t) とするとき, $\alpha^2 + \beta^2$ を t と θ で表せ。
- (2) 線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面と平面 $z = 0, z = 1$ によって囲まれる立体の体積を θ で表せ。
- (3) Q が C 上を一周するとき, (2) で求めた体積の最大値, 最小値を求めよ。

第 3 問

e は自然対数の底とする。 $t > e$ において関数 $f(t)$, $g(t)$ を次のように定める。

$$f(t) = \int_1^e \frac{t^2 \log x}{t-x} dx, \quad g(t) = \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t-x} dx$$

- (1) $f(t) - g(t)$ を t の 1 次式で表せ。
- (2) $1 \leq x \leq e$ かつ $t > e$ のとき $\frac{1}{t-x} \leq \frac{1}{t-e}$ が成り立つことを用いて, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ を示せ。
- (3) $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(f(t) - \frac{bt^2}{t-a} \right) = 0$ となる定数 a, b を求めよ。

第 4 問

二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$a_1 = 3, \quad b_1 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n + 5b_n)$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 3b_n)$$

- (1) すべての自然数 n について, $a_n^2 - 5b_n^2 = 4$ であることを示せ。
- (2) すべての自然数 n について, a_n , b_n は自然数かつ $a_n + b_n$ は偶数であることを証明せよ。

第 5 問

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $P = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ とする。 $AP = PD$ が成り立つとき、 a , x , y を求めよ。ただし $a > 0$ とする。

(2) $(A + tE)^n = 4E$ が成り立つような実数 t と自然数 n の組をすべて求めよ。ただし $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

第 6 問

放物線 $C: y = x^2$ 上の異なる 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(s, s^2)$ ($s < t$) における接線の交点を $R(X, Y)$ とする。

- (1) X, Y を t, s を用いて表せ。
- (2) 点 P, Q が $\angle PRQ = \frac{\pi}{4}$ を満たしながら C 上を動くとき、点 R は双曲線上を動くことを示し、かつ、その双曲線の方程式を求めよ。