

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2007 年

試験時間：120 分

問題数：6 問

第 1 問

xy 平面上に 2 定点 $A(1, 0)$ と $O(0, 0)$ をとる。また、 m を 1 より大きい実数とする。

- (1) $AP : OP = m : 1$ を満たす点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ。
- (2) 点 A を通る直線で、(1) で求めた軌跡との共有点が 1 個のものを求めよ。また、その共有点の座標も求めよ。

第 2 問

関数 $f(x) = b + \frac{1}{b} - e^{ax} - e^{-ax}$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 $a > 0$, $b > 1$ とする。

- (1) $f(x) \geq 0$ を満たす x の範囲を求めよ。
- (2) 曲線 $y = \sqrt{f(x)}$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。
- (3) $a = b \log b$ のとき、(2) で求めた体積 V を $V(b)$ と表す。このとき、 $\lim_{b \rightarrow \infty} V(b) = 2\pi$ となることを示せ。

第 3 問

(1) $\int_0^\pi x^2 \cos^2 x \, dx$ を求めよ。

(2) 定数 a に対して,

$$f(x) = ax \sin x + x + \frac{\pi}{2}$$

とおく。このとき, 不等式

$$\int_0^\pi \{f'(x)\}^2 \, dx \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす a の範囲を求めよ。ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする。

第 4 問

- (1) 一般項 a_n が $an^3 + bn^2 + cn$ で表される数列 $\{a_n\}$ において,

$$n^2 = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つように, 定数 a, b, c を定めよ。

- (2) (1) の結果を用いて, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ となることを示せ。

- (3) $1, 2, \dots, n$ の相異なる 2 数の積のすべての和を $S(n)$ とする。たとえば, $S(3) = 1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 3 = 11$ である。 $S(n)$ を n の 4 次式で表せ。

第 5 問

$a \neq 0$ とする。 $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に対して, 2 次正方行列 P が

$$PA = A + B, \quad PB = A - B$$

を満たしている。

(1) a と b を用いて P を表し, P が逆行列 P^{-1} をもつことを示せ。

(2) $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = P^{-1}B$ とおく。 xy 平面において, 点 (a, b) が放物線 $x = y^2 + 2$ 上を動くとき, 点 (s, t) の軌跡を求めよ。ただし, $|y| \leq 1$ とする。

第 6 問

xy 平面上で、2 次曲線 $C: x^2 + ay^2 + by = 0$ が直線 $L: y = 2x - 1$ に点 P で接している。ただし、 $a \neq -\frac{1}{4}$ とする。

- (1) a と b の関係式を求めよ。
- (2) C が楕円，放物線，双曲線となるそれぞれの場合に， b の値の範囲を求めよ。
- (3) C が楕円となる場合の接点 P の存在範囲を求め， xy 平面上に図示せよ。