

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2006 年

試験時間：120 分

問題数：7 問

第 1 問

$f(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 8$ とする。

- (1) $(x^2 + t)^2 - f(x) = (px + q)^2$ が x の恒等式となるような整数 t, p, q の値を一組求めよ。
- (2) (1) で求めた t, p, q の値を用いて方程式 $(x^2 + t)^2 = (px + q)^2$ を解くことにより, 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

第 2 問

$a \geq b > 0$, $x \geq 0$ とし, n は自然数とする。次の不等式を示せ。

$$(1) \quad 0 \leq e^x - (1+x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$$

$$(2) \quad a^n - b^n \leq n(a-b)a^{n-1}$$

$$(3) \quad e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2 e^x}{2n}$$

第 3 問

座標空間において、 $|x| \leq z^2$ を満たす点 (x, y, z) 全体からなる立体を R とする。点 $(0, 0, 1)$ を通り x 軸と平行な直線を ℓ とする。 ℓ を中心軸とする半径 1 の円柱を C とし、 R と C の共通部分を T とする。

- (1) $-1 < h < 1$ を満たす定数 h に対して、点 $(0, 0, 1 + h)$ を通り z 軸に垂直な平面による T の切り口の面積を求めよ。
- (2) T の体積を求めよ。

第 4 問

座標空間において、原点 O を通り方向ベクトル $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ をもつ直線を L_θ とする。点 $A(2, 0, 1)$ から直線 L_θ に下ろした垂線と L_θ との交点を P_θ とする。

- (1) θ が実数全体を動くとき、 P_θ は xy 平面内の円周上を動くことを示し、その中心の座標と半径を求めよ。
- (2) θ が $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする。三角形 OAP_θ の面積の最大値と、そのときの P_θ の座標を求めよ。

第 5 問

行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。

- (1) 次の式のうち、定義されるものは計算し、定義されないものは「定義されない」とかけ。

(ア) $A + B$

(イ) AB

(ウ) BA

(エ) AA

- (2) 2次正方行列 C が $C(BA) = (BA)C$ を満たすとき、 $C = sE + t(BA)$ となる実数

s, t が存在することを示せ。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

第 6 問

xy 平面において、媒介変数 t を用いて

$$x = 2 \left(t + \frac{1}{t} + 1 \right), \quad y = t - \frac{1}{t}$$

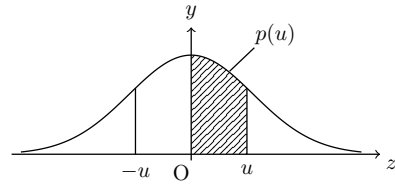
と表される曲線を C とする。

- (1) 曲線 C の方程式を求め、その概形をかけ。
- (2) 点 $(a, 0)$ を通り曲線 C に接する直線があるような a の範囲と、そのときの接線の方程式をすべて求めよ。

第 7 問

投げたとき裏が出やすいと思われるコインがある。このコインについて本当に裏が出やすいかどうか調べてみたい。このコインを投げて表の出る確率を p とし、100 回投げて表の出る回数を X とする。このとき次の問いに答えよ。ただし、必要があれば、次ページの正規分布表を参照し、正規分布による近似を用いてよい。

- (1) $p = \frac{1}{2}$ のとき $P(X \leq 40)$ を四捨五入により小数点以下第 2 位まで求めよ。
- (2) $X \leq a$ であったら「 $p < \frac{1}{2}$ 」、 $X > a$ であったら「 $p = \frac{1}{2}$ 」と判断することにする（ただし a は 50 未満の整数）。本当は $p = \frac{1}{2}$ であるのに「 $p < \frac{1}{2}$ 」と判断される確率が 0.10 以下となるような整数 a の最大値を求めよ。
- (3) (2) の a を用いて「 $p < \frac{1}{2}$ 」か「 $p = \frac{1}{2}$ 」かの判断を行うとする。このとき、 $p = \frac{2}{5}$ であるのに「 $p = \frac{1}{2}$ 」と判断される確率を四捨五入により小数点以下第 2 位まで求めよ。ただし、 $\sqrt{6} \doteq 2.45$ としてよい。



正 規 分 布 表

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49897	0.49900