

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2005 年

試験時間：120 分

問題数：7 問

第 1 問

次の関係式を満たす関数 $f(x)$ がただ一つ存在するように，定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = ax + \frac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t \, dt \right)^4$$

第 2 問

曲線 $C : y = \sin x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) を考える。 C 上の点 P における C の法線を ℓ とする。

- (1) 法線 ℓ が点 $Q(0, 1)$ を通るような点 P がただ一つ存在することを示せ。
- (2) (1) の条件を満たす点 P に対し、直線 ℓ 、曲線 C 、直線 $y = 1$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし、直線 ℓ 、曲線 C 、 x 軸で囲まれる部分の面積を S_2 とする。 S_1 と S_2 の大小を比較せよ。

第 3 問

曲線 $C: y = e^x$ 上の異なる 2 点 $A(a, e^a)$, $P(t, e^t)$ における C のそれぞれの法線の交点を Q として, 線分 AQ の長さを $L_a(t)$ で表す。さらに, $r(a) = \lim_{t \rightarrow a} L_a(t)$ と定義する。

- (1) $r(a)$ を求めよ。
- (2) a が実数全体を動くとき, $r(a)$ の最小値を求めよ。

第 4 問

2 次正方行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) P が逆行列をもたなければ $\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ となる k が存在するか、または $\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることを示せ。
- (2) 条件 $A^2 = O$, $A \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす 2 次正方行列 A が存在するとき、 P は逆行列をもつことを示せ。
- (3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ のとき $A \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ となるような p, q, r を 1 組求め、 $P^{-1}AP$ を計算せよ。

第 5 問

実数 a に対して，曲線 C_a を方程式

$$(x - a)^2 + ay^2 = a^2 + 3a + 1$$

によって定める。

- (1) C_a は a の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し，その 4 定点の座標を求めよ。
- (2) a が正の実数全体を動くとき， C_a が通過する範囲を図示せよ。

第 6 問

30 人のクラスにおいて 2 回試験を行ったところ 2 回とも全員が受験し、得点の平均値と分散について、以下の表のような結果を得た。2 回全体の得点の分散は 44 であり、1 回目と 2 回目の得点の共分散は 20 であった。

	平均値	分散
1 回目	62	36
2 回目	60	
全体		44

- (1) 2 回目の試験の得点の分散を求めよ。
- (2) 1 回目と 2 回目の試験の得点の相関係数を求めよ。
- (3) 3 回目の試験を行ったところ 24 人が受験し、平均値 54, 分散 51 であった。3 回全体の得点の分散を求めよ。

第 7 問

正の整数 N に対して、 $a^2 \leq N < (a+1)^2$ である正の整数 a と $b = N - a^2$ によって、数列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_{n+1} &= a + \frac{b}{x_n + a} \end{aligned}$$

で定義する。

- (1) N, a を入力して $x_0, x_1, x_2, \dots$ を計算し、 $|x_n^2 - N| < 0.0001$ となったとき x_n の値を出力して終了するプログラムを書け。ただし、BASIC では $|x|$ は $\text{ABS}(x)$ で求められる。

- (2) $x_{n+1} - \sqrt{N} = \frac{a - \sqrt{N}}{x_n + a} (x_n - \sqrt{N})$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) が成り立つことを示せ。

- (3) $b > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x_0 < x_2 < \dots < x_{2k} < \sqrt{N} < x_{2k+1} < \dots < x_3 < x_1$$

- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{N}$ を示せ。