

2005 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 12 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
理 系 学 部	事前に確認すること

〔 1 〕 次の関係式を満たす関数 $f(x)$ がただ一つ存在するように, 定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = ax + \frac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t \, dt \right)^4$$

〔 2 〕 曲線 $C: y = \sin x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) を考える。 C 上の点 P における C の法線を ℓ とする。

- (1) 法線 ℓ が点 $Q(0, 1)$ を通るような点 P がただ一つ存在することを示せ。
- (2) (1) の条件を満たす点 P に対し、直線 ℓ 、曲線 C 、直線 $y = 1$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし、直線 ℓ 、曲線 C 、 x 軸で囲まれる部分の面積を S_2 とする。 S_1 と S_2 の大小を比較せよ。

〔 3 〕 曲線 $C : y = e^x$ 上の異なる 2 点 $A(a, e^a)$, $P(t, e^t)$ における C のそれぞれの法線の交点を Q として, 線分 AQ の長さを $L_a(t)$ で表す。さらに, $r(a) = \lim_{t \rightarrow a} L_a(t)$ と定義する。

(1) $r(a)$ を求めよ。

(2) a が実数全体を動くとき, $r(a)$ の最小値を求めよ。

[4] 2次正方行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

(1) P が逆行列をもたなければ $\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ となる k が存在するか、または

$\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることを示せ。

(2) 条件 $A^2 = O$, $A \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす2次正方行列 A が存在するとき、 P は逆行列をもつことを示せ。

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ のとき $A \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ となるような p, q, r を1組求め、 $P^{-1}AP$ を計算せよ。

〔 5 〕 実数 a に対して，曲線 C_a を方程式

$$(x - a)^2 + ay^2 = a^2 + 3a + 1$$

によって定める。

- (1) C_a は a の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し，その 4 定点の座標を求めよ。
- (2) a が正の実数全体を動くとき， C_a が通過する範囲を図示せよ。

- 〔 6 〕 30 人のクラスにおいて 2 回試験を行ったところ 2 回とも全員が受験し、得点の平均値と分散について、以下の表のような結果を得た。2 回全体の得点の分散は 44 であり、1 回目と 2 回目の得点の共分散は 20 であった。

	平均値	分散
1 回目	62	36
2 回目	60	
全体		44

- (1) 2 回目の試験の得点の分散を求めよ。
- (2) 1 回目と 2 回目の試験の得点の相関係数を求めよ。
- (3) 3 回目の試験を行ったところ 24 人が受験し、平均値 54，分散 51 であった。3 回全体の得点の分散を求めよ。

〔 7 〕 正の整数 N に対して、 $a^2 \leq N < (a+1)^2$ である正の整数 a と $b = N - a^2$ によって、数列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_{n+1} &= a + \frac{b}{x_n + a} \end{aligned}$$

で定義する。

(1) N, a を入力して $x_0, x_1, x_2, \dots$ を計算し、 $|x_n^2 - N| < 0.0001$ となったとき x_n の値を出力して終了するプログラムを書け。ただし、BASIC では $|x|$ は $\text{ABS}(x)$ で求められる。

(2) $x_{n+1} - \sqrt{N} = \frac{a - \sqrt{N}}{x_n + a} (x_n - \sqrt{N})$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) が成り立つことを示せ。

(3) $b > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x_0 < x_2 < \dots < x_{2k} < \sqrt{N} < x_{2k+1} < \dots < x_3 < x_1$$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{N}$ を示せ。

