

2004 年度 個別学力試験問題

# 数 学 (120 分)

●対象学部

理系学部

|     |
|-----|
| 注 意 |
|-----|

1. 問題冊子は 1 ページから 12 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

| 学 部     | 解 答 す べ き 問 題 |
|---------|---------------|
| 理 系 学 部 | 事前に確認すること     |

〔 1 〕 関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log |x|}{x} & (|x| > 1) \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & (|x| \leq 1) \end{cases}$$

と定める。ただし、 $a, b, c, d$  は定数とし、 $f(x)$  は  $x = \pm 1$  において微分可能とする。なお、 $\log$  は  $e = 2.718\cdots$  を底とする自然対数である。

(1)  $a, b, c, d$  の値を求めよ。

(2)  $f(x)$  の最大値を求めよ。

[ 2 ]  $f(x) = \sin^3 x$  とする。

(1)  $f'(0)$  および  $f'(2\pi)$  を求めよ。

(2)  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$  を求めよ。

(3)  $p(x)$  を  $x$  の 2 次式とすると、 $\int_0^{2\pi} p(x)f''(x) dx = 0$  を示せ。

[ 3 ]  $f(x)$  は  $x \geq 0$  で連続で,  $f(0) = 0$  かつ  $x > 0$  において  $f'(x) > 0$  を満たすとする。 $t > 0$  に対して, 曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸および直線  $x = t$  とで囲まれる図形を  $x$  軸のまわりに一回転してできる立体の体積を  $X(t)$ , 曲線  $y = f(x)$  と  $y$  軸および直線  $y = f(t)$  とで囲まれる図形を  $y$  軸のまわりに一回転してできる立体の体積を  $Y(t)$  とする。また,  $X(0) = Y(0) = 0$  とする。このとき, 次を示せ。

(1)  $X'(t) = \pi f(t)^2$ ,  $Y'(t) = \pi t^2 f'(t)$  ( $t > 0$ ) である。

(2)  $f(x)$  が整式でかつ, すべての  $t \geq 0$  に対して  $X(t) = Y(t)$  が成り立つならば,  $f(x) = x$  ( $x \geq 0$ ) である。

(3)  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  ならば,  $X(t) = Y(t)$  ( $t \geq 0$ ) である。

〔 4 〕 2 次正方行列  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  が等式

$$X^2 + aX + bE = O$$

を満たすとする。ただし,  $x, y, z, w, a, b$  は実数,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  とする。

(1)  $x + w \neq -a$  のとき,  $a^2 - 4b > 0$  であることを示し,  $a, b$  を用いて  $X$  を表せ。

(2)  $a^2 - 4b \leq 0$  のとき,  $yz \leq 0$  を示せ。

〔 5 〕 楕円  $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  上の点で、 $x \geq 0$  の範囲にあり、定点  $A(0, -1)$  との距離が最大となる点を  $P$  とする。

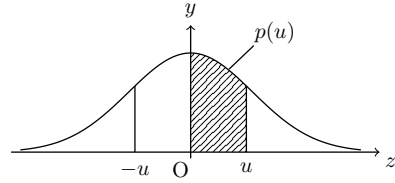
(1) 点  $P$  の座標と線分  $AP$  の長さを求めよ。

(2) 点  $Q$  は楕円  $C$  上を動くとする。 $\triangle APQ$  の面積が最大となるとき、点  $Q$  の座標および  $\triangle APQ$  の面積を求めよ。

- 〔 6 〕  $X_1, X_2, \dots, X_n$  および  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  は、それぞれ区間  $[0, 1]$  で等確率でかつ独立に発生させた乱数である。各  $i = 1, 2, \dots, n$  について、 $(X_i, Y_i)$  から  $Z_i$  を次のように定義する。

$$Z_i = \begin{cases} 1 & (X_i^2 + Y_i^2 \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

- (1) 確率  $P(Z_i = 1)$  を求めよ。
- (2)  $W_n = \frac{4}{n}(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n)$  とするとき、 $W_n$  の平均  $\mu$  と分散  $\sigma^2$  を求めよ。
- (3)  $W_n$  は正規分布で近似できるとし、 $n = 10^m$  ( $m$  は正の整数) とする。 $W_n$  の値が 95 % の確率で区間  $(\mu - 0.0034, \mu + 0.0034)$  に入る  $m$  の最小値を求めよ。



正 規 分 布 表

| $u$ | .00     | .01     | .02     | .03     | .04     | .05     | .06     | .07     | .08     | .09     |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.0 | 0.0000  | 0.0040  | 0.0080  | 0.0120  | 0.0160  | 0.0199  | 0.0239  | 0.0279  | 0.0319  | 0.0359  |
| 0.1 | 0.0398  | 0.0438  | 0.0478  | 0.0517  | 0.0557  | 0.0596  | 0.0636  | 0.0675  | 0.0714  | 0.0753  |
| 0.2 | 0.0793  | 0.0832  | 0.0871  | 0.0910  | 0.0948  | 0.0987  | 0.1026  | 0.1064  | 0.1103  | 0.1141  |
| 0.3 | 0.1179  | 0.1217  | 0.1255  | 0.1293  | 0.1331  | 0.1368  | 0.1406  | 0.1443  | 0.1480  | 0.1517  |
| 0.4 | 0.1554  | 0.1591  | 0.1628  | 0.1664  | 0.1700  | 0.1736  | 0.1772  | 0.1808  | 0.1844  | 0.1879  |
| 0.5 | 0.1915  | 0.1950  | 0.1985  | 0.2019  | 0.2054  | 0.2088  | 0.2123  | 0.2157  | 0.2190  | 0.2224  |
| 0.6 | 0.2257  | 0.2291  | 0.2324  | 0.2357  | 0.2389  | 0.2422  | 0.2454  | 0.2486  | 0.2517  | 0.2549  |
| 0.7 | 0.2580  | 0.2611  | 0.2642  | 0.2673  | 0.2704  | 0.2734  | 0.2764  | 0.2794  | 0.2823  | 0.2852  |
| 0.8 | 0.2881  | 0.2910  | 0.2939  | 0.2967  | 0.2995  | 0.3023  | 0.3051  | 0.3078  | 0.3106  | 0.3133  |
| 0.9 | 0.3159  | 0.3186  | 0.3212  | 0.3238  | 0.3264  | 0.3289  | 0.3315  | 0.3340  | 0.3365  | 0.3389  |
| 1.0 | 0.3413  | 0.3438  | 0.3461  | 0.3485  | 0.3508  | 0.3531  | 0.3554  | 0.3577  | 0.3599  | 0.3621  |
| 1.1 | 0.3643  | 0.3665  | 0.3686  | 0.3708  | 0.3729  | 0.3749  | 0.3770  | 0.3790  | 0.3810  | 0.3830  |
| 1.2 | 0.3849  | 0.3869  | 0.3888  | 0.3907  | 0.3925  | 0.3944  | 0.3962  | 0.3980  | 0.3997  | 0.4015  |
| 1.3 | 0.4032  | 0.4049  | 0.4066  | 0.4082  | 0.4099  | 0.4115  | 0.4131  | 0.4147  | 0.4162  | 0.4177  |
| 1.4 | 0.4192  | 0.4207  | 0.4222  | 0.4236  | 0.4251  | 0.4265  | 0.4279  | 0.4292  | 0.4306  | 0.4319  |
| 1.5 | 0.4332  | 0.4345  | 0.4357  | 0.4370  | 0.4382  | 0.4394  | 0.4406  | 0.4418  | 0.4429  | 0.4441  |
| 1.6 | 0.4452  | 0.4463  | 0.4474  | 0.4484  | 0.4495  | 0.4505  | 0.4515  | 0.4525  | 0.4535  | 0.4545  |
| 1.7 | 0.4554  | 0.4564  | 0.4573  | 0.4582  | 0.4591  | 0.4599  | 0.4608  | 0.4616  | 0.4625  | 0.4633  |
| 1.8 | 0.4641  | 0.4649  | 0.4656  | 0.4664  | 0.4671  | 0.4678  | 0.4686  | 0.4693  | 0.4699  | 0.4706  |
| 1.9 | 0.4713  | 0.4719  | 0.4726  | 0.4732  | 0.4738  | 0.4744  | 0.4750  | 0.4756  | 0.4761  | 0.4767  |
| 2.0 | 0.4772  | 0.4778  | 0.4783  | 0.4788  | 0.4793  | 0.4798  | 0.4803  | 0.4808  | 0.4812  | 0.4817  |
| 2.1 | 0.4821  | 0.4826  | 0.4830  | 0.4834  | 0.4838  | 0.4842  | 0.4846  | 0.4850  | 0.4854  | 0.4857  |
| 2.2 | 0.4861  | 0.4864  | 0.4868  | 0.4871  | 0.4875  | 0.4878  | 0.4881  | 0.4884  | 0.4887  | 0.4890  |
| 2.3 | 0.4893  | 0.4896  | 0.4898  | 0.4901  | 0.4904  | 0.4906  | 0.4909  | 0.4911  | 0.4913  | 0.4916  |
| 2.4 | 0.4918  | 0.4920  | 0.4922  | 0.4925  | 0.4927  | 0.4929  | 0.4931  | 0.4932  | 0.4934  | 0.4936  |
| 2.5 | 0.4938  | 0.4940  | 0.4941  | 0.4943  | 0.4945  | 0.4946  | 0.4948  | 0.4949  | 0.4951  | 0.4952  |
| 2.6 | 0.49534 | 0.49547 | 0.49560 | 0.49573 | 0.49585 | 0.49598 | 0.49609 | 0.49621 | 0.49632 | 0.49643 |
| 2.7 | 0.49653 | 0.49664 | 0.49674 | 0.49683 | 0.49693 | 0.49702 | 0.49711 | 0.49720 | 0.49728 | 0.49736 |
| 2.8 | 0.49744 | 0.49752 | 0.49760 | 0.49767 | 0.49774 | 0.49781 | 0.49788 | 0.49795 | 0.49801 | 0.49807 |
| 2.9 | 0.49813 | 0.49819 | 0.49825 | 0.49831 | 0.49836 | 0.49841 | 0.49846 | 0.49851 | 0.49856 | 0.49861 |
| 3.0 | 0.49865 | 0.49869 | 0.49874 | 0.49878 | 0.49882 | 0.49886 | 0.49889 | 0.49893 | 0.49897 | 0.49900 |

〔 7 〕 実数  $A, B, C$  が与えられたとき,  $a_0 = A, b_0 = B, c_0 = C$  とおいて,  $n = 0, 1, 2, \dots$  について  $a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}, b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2}, c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  とする。

(1)  $A, B, C$  を読み込み, 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  を  $n = 20$  まで生成し, 印刷していくプログラムを書け。

(2)  $a_n + b_n + c_n = A + B + C$  を示せ。

(3)  $2a_n - b_n - c_n$  を  $A, B, C$  および  $n$  で表せ。

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。





