

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（理系）

対象年度：2003 年

試験時間：120 分

問題数：7 問

第 1 問

実数全体で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が、次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たしている。

- (i) すべての x について、 $f(x) > 0$ である。
 - (ii) すべての x, y について、 $f(x+y) = f(x)f(y)e^{-xy}$ が成り立つ。
- (1) $f(0) = 1$ を示せ。
 - (2) $g(x) = \log f(x)$ とする。このとき、 $g'(x) = f'(0) - x$ が成り立つことを示せ。
 - (3) $f'(0) = 2$ となるような $f(x)$ を求めよ。

第 2 問

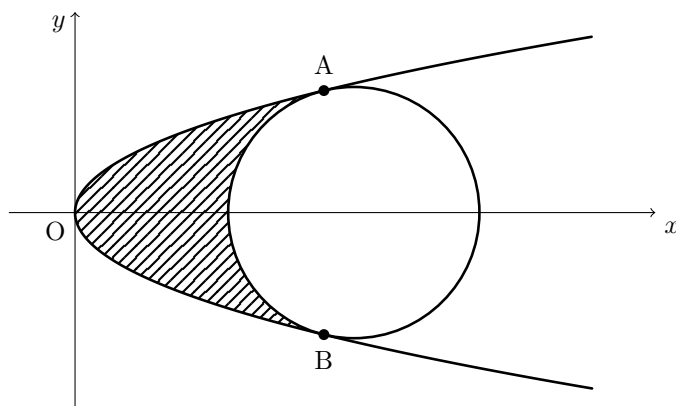
関数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + ax + b}$ が定める曲線 $y = f(x)$ は原点で直線 $y = x$ に接している。

- (1) b の値を求めよ。
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ。
- (3) $f(x)$ が最大値と最小値を持つような a の値の範囲を求め、そのときの $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。
- (4) $f(x)$ が最大値を持つが最小値は持たないとき、 a の値と $f(x)$ の最大値を求めよ。

第 3 問

下の図のように、円 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ ($r > \frac{1}{2}$) が放物線 $y^2 = x$ と 2 点 A, B で接している。

- (1) 点 A の x 座標および a を r で表せ。
- (2) 円と放物線で囲まれた部分（斜線部分）を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を $V(r)$ とする。このとき、 $\lim_{r \rightarrow \frac{1}{2}+0} \frac{V(r)}{\left(r - \frac{1}{2}\right)^3}$ を求めよ。



第 4 問

行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3 & 3-a \end{pmatrix}$ に対して、行列 $P = A - E$ が $P^2 = P$ を満たしている。ただし、 E は 2 次の単位行列とする。

- (1) a, b が満たす条件を求めよ。
- (2) A の成分がすべて整数のとき、 a が満たす条件を求めよ。
- (3) $A^{-1} = sP + tE$ を満たす実数 s, t を求めよ。

第 5 問

2 点 $(0, 1)$, $(0, -1)$ を焦点とする双曲線 C_1 と 2 点 $(1, 0)$, $(-1, 0)$ を焦点とする楕円 C_2 は, 2 点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ のみを共有している。

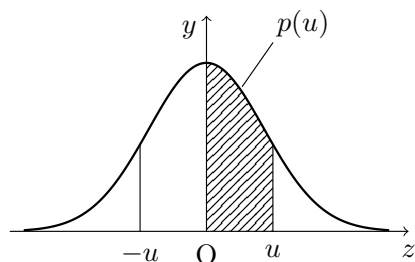
- (1) C_1 と C_2 の方程式を, それぞれ求めよ。
- (2) C_1 と漸近線を共有し, C_1 と異なる双曲線を C_3 とする。 C_2 と C_3 が 2 点のみを共有するとき, C_3 の方程式を求めよ。

第 6 問

A 大学の入学試験では、1200 人の入学定員に対して 4540 人の受験者があった。入学試験問題は 800 点満点で、受験者全体の成績の分布は、平均 395 点、標準偏差 130 点の正規分布とみなしてよいとする。このとき、合格者数を 1200 人として、次の問いに答えよ。ただし、必要があれば次頁の正規分布表を用いてよい。また、試験の成績は整数値とする。

- (1) B 君が自己採点をしたところ 616 点であった。B 君は上位何パーセント以内に入ると予想されるか、小数第 1 位未満を四捨五入して答えよ。
- (2) 合格するには少なくとも何点以上の成績であればよいか。
- (3) C 高校からの受験者 300 人の成績の分布は、平均 463 点、標準偏差 100 点の正規分布とみなしてよいとする。この 300 人の何パーセントが合格できると予想されるか、小数第 1 位未満を四捨五入して答えよ。

正 規 分 布 表



u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49897	0.49900

第 7 問

関数 $f(x)$ は区間 $a \leq x \leq b$ で連続であるとする (ただし, $a < b$)。さらに, $f(x)$ は $a < d < b$ を満たす点 $x = d$ で最小値をとり,

$$a < x_1 < x_2 < d \quad \text{ならば} \quad f(x_1) > f(x_2),$$

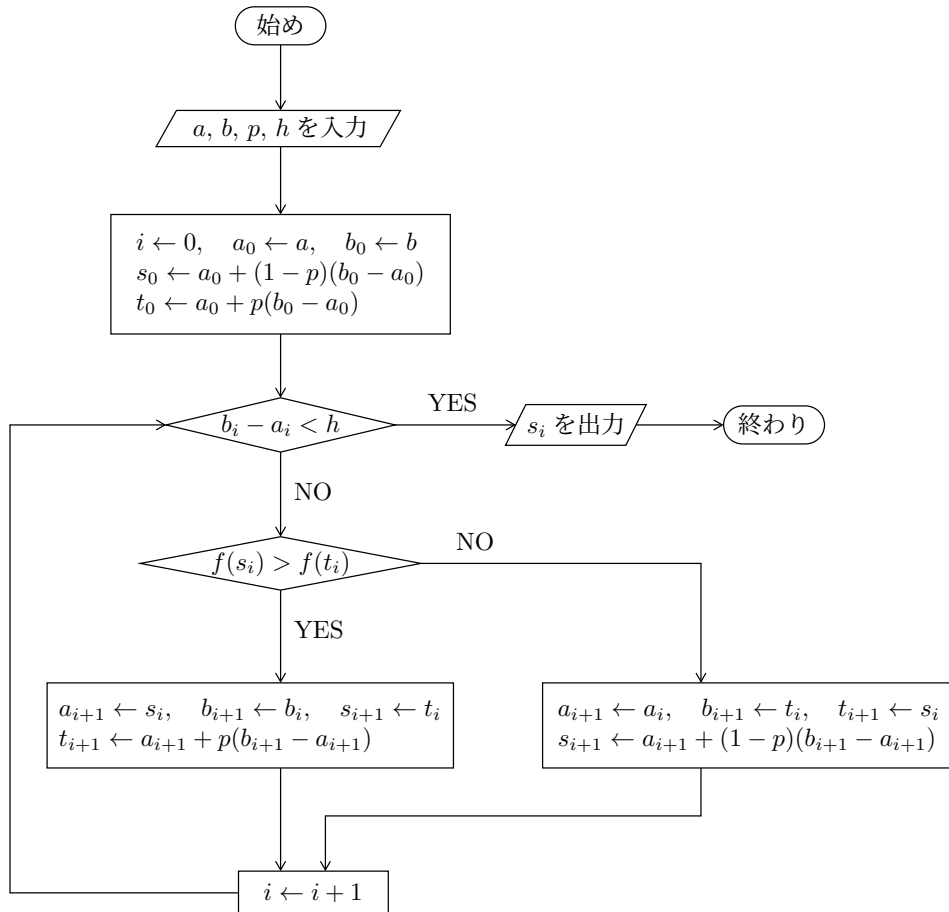
$$d < x_1 < x_2 < b \quad \text{ならば} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

とする。区間の幅を縮小させながら d の値を近似的に計算する。 $a < s < t < b$ を満たす s と t に対し,

$$f(s) > f(t) \quad \text{ならば} \quad s < d < b,$$

$$f(s) \leq f(t) \quad \text{ならば} \quad a < d \leq t$$

であることを用い, 次のアルゴリズムを作成した。ここで, p は $\frac{1}{2} < p < 1$ を満たす定数, h は $h < b - a$ を満たす十分小さい正の定数とする。



(1) $p = \frac{b_1 - s_1}{b_1 - a_1} = \frac{t_1 - a_1}{b_1 - a_1}$ を満たす p を求めよ。

(2) (1) で求めた p に対して,

$$p = \frac{b_i - s_i}{b_i - a_i} = \frac{t_i - a_i}{b_i - a_i}$$

が $i = k$ のとき成り立てば, $i = k + 1$ のときも成り立つことを示せ。

(3) (1) で求めた p に対しアルゴリズムを実行する。 p^i がはじめて $\frac{h}{b-a}$ より小さくなったとき, s_i が出力されることを示せ。