

2002 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対象学部

理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 12 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
理 系 学 部	事前に確認すること

〔 1 〕 a を正の定数とし、関数 $f(x)$ を以下のように定める。

$$f(x) = \frac{\log x}{(1+x)^a} \quad (x > 0)$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c) = 0$ となる c が存在することを示せ。
- (2) $f'(c) = 0$ となる c はただ一つであり、関数 $f(x)$ は $x = c$ で最大値をとることを示せ。

〔 2 〕 曲線 C を次の方程式で定める。

$$y = \sqrt{x^2 + 4} \quad (x \geq 0)$$

C 上の点 P を通る傾き -1 の直線が x 軸と交わる点の x 座標を $2t$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P の x 座標, y 座標を t で表せ。
- (2) 点 P が C 上を動いたときの t の最小値を求めよ。
- (3) 原点を O とし, 線分 OP , 曲線 C , y 軸で囲まれる図形の面積 S を t で表せ。

〔 3 〕 $x \geq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して、関数 $g(x)$ ($x > 0$) を次のように定める。

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (0 < x < 1)$$

$$g(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt \quad (x \geq 1)$$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) $x \neq 1$ における導関数 $g'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x) = 2\pi \cos(2\pi x)$ のとき、 $g(x)$ を求めよ。

(3) 次のような $g(x)$ を定める $f(x)$ を求めよ。

$$g(x) = \sin(2\pi x) + x \quad (0 < x < 1)$$

$$g(x) = 1 \quad (x \geq 1)$$

[4] 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。ただし、 a, b, c, d は実数とし、

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

(1) $a + d \neq 0$ とする。 $A^2 = E$ ならば $A = E$ または $A = -E$ であることを示せ。

(2) $a = d \neq 0$ とする。

(i) 行列 $A^2 + E$ は逆行列を持つことを示せ。

(ii) $A^4 = E$ ならば $A = E$ または $A = -E$ であることを示せ。

〔 5 〕 a を正の実数とする。曲線 C_a を極方程式

$$r = 2a \cos(a - \theta)$$

によって定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) C_a は円になることを示し、その中心と半径を求めよ。
- (2) C_a が直線 $y = -x$ に接するような a をすべて求めよ。

〔 6 〕 数直線上の原点に立つ人が確率 p で表の出るコインを投げて、表が出れば $+1$ 進み、裏が出れば -1 進むとする。その場所で再びコインを投げ、その結果に応じて $+1$ または -1 進む。これを n 回繰り返した後のこの人の立つ位置を表す確率変数を S_n とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{1}{2}(S_n + n)$ は 2 項分布 $B(n, p)$ に従うことを示せ。
- (2) $p = \frac{1}{2}$ のコインを 100 回投げた後に、この人が原点から 22 以上隔たっている確率は 0.05 以下であることを示せ。ただし、確率変数 U が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき、 $P(|U| < 1.96) = 0.95$ であることは用いてよい。
- (3) 未知の p を持つコインを 100 回投げた後に、この人が -60 の位置にいたとする。このデータに基づいて、 p の値を信頼度 95% で推定せよ。ただし、信頼区間の端点は小数点以下第 2 位まで求めよ。

〔 7 〕 $0 < a < 1$ なる a に対して 0 と 1 の列 $c_1, \dots, c_n$ を次の流れ図に従って計算する。
 このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a = 0.25$ および $a = 0.375$ のとき、それぞれに対応する $c_1, \dots, c_n$ を求めよ。
- (2) $a = 0.1$ のとき、どのような出力が得られるか説明せよ。
- (3) $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = 1$ を出力して終了する a を求めよ。
- (4) 逆に $c_1, \dots, c_n$ が与えられたとき、 $c_1, \dots, c_n$ を出力して終了するような a を求める BASIC プログラムを書け。ただし、 n および $c_1, \dots, c_n$ は変数 N と $C(1), \dots, C(N)$ に代入されているものとする。



