

2001 年度 個別学力試験問題

# 数 学 (120 分)

●対象学部

理系学部

|     |
|-----|
| 注 意 |
|-----|

1. 問題冊子は 1 ページから 12 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

| 学 部     | 解 答 す べ き 問 題 |
|---------|---------------|
| 理 系 学 部 | 事前に確認すること     |

[ 1 ]  $f(x)$  を  $0 \leq x \leq 1$  において連続かつ,  $0 < x < 1$  において微分可能で  $f'(x) > 0$  を満たす関数とする。  $0 < t < 1$  に対し

$$I(t) = \int_0^1 |f(t) - f(x)| x \, dx$$

とおく。

(1) 導関数  $I'(t)$  を求めよ。

(2)  $I(t)$  が最小となる  $t$  の値を求めよ。

[ 2 ]

(1)  $x > 0$  に対して次の不等式を示せ。

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$$

(2)  $f(x)$  を  $0 \leq x \leq 1$  で連続で,  $f(x) \geq 0$  を満たす関数とする。

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)\right),$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

とおくとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^I$$

であることを示せ。

〔 3 〕 曲線  $y = x(1 - x)$  ( $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ) を  $y$  軸のまわりに回転してできる容器に，単位時間あたり一定の割合  $V$  で水を注ぐ。

(1) 水面の上昇する速度  $u$  を水面の高さ  $h$  の関数として表せ。

(2) 空の容器に水がいっぱいになるまでの時間を求めよ。

〔 4 〕 数列  $\{a_n\}$  と数  $c$  が次の条件を満たすとする。

$$\begin{aligned}a_1 &= 2, & a_2 &= 2, \\a_{n+1} &= 2a_n + ca_{n-1}, \\a_{n+2} &= (2c+1)a_n + 6a_{n-1} \quad (n \geq 2)\end{aligned}$$

(1)  $c$  を求めよ。

(2)  $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$  を満たす 2 次正方行列  $A$  を求めよ。

(3)  $A \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$  を満たす数  $b$  をすべて求めよ。

(4)  $a_n$  を求めよ。

[ 5 ]  $C$  を双曲線  $2x^2 - 2y^2 = 1$  とする。 $l, m$  を点  $(1, 0)$  を通り,  $x$  軸とそれぞれ  $\theta, \theta + \frac{\pi}{4}$  の角をなす 2 直線とする。ここで  $\theta$  は  $\frac{\pi}{4}$  の整数倍でないとする。

(1) 直線  $l$  は双曲線  $C$  と相異なる 2 点  $P, Q$  で交わることを示せ。

(2)  $PQ^2$  を,  $\theta$  を用いて表せ。

(3) 直線  $m$  と曲線  $C$  の交点を  $R, S$  とするとき,  $\frac{1}{PQ^2} + \frac{1}{RS^2}$  は  $\theta$  によらない定数となることを示せ。

[ 6 ]

$$f(x) = \frac{1}{4x^8 + 5x^3 + 1}$$

とする。区間  $[0, 1]$  を  $n$  等分した分点を

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad \cdots, \quad x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, \quad x_n = 1$$

とする。

(1) 不等式

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

を示せ。

(2)  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$  と  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$  がともに  $\int_0^1 f(x) dx$  の小数第 3 位までの近似値となるためには、 $n$  をどのくらい大きくとればよいか。

(3) (2) の結果を用いて、 $\int_0^1 f(x) dx$  の小数第 3 位までの近似値を計算するプログラムを書け。

- 〔 7 〕 生徒数 32 名のある学級で生徒の兄弟姉妹の数 ( $x$ ) と、いとこの数 ( $y$ ) とを調べたところ、次の表を得た。

| $y \backslash x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------|---|---|---|---|
| 0                | 3 | 4 | 1 | 0 |
| 1                | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2                | 0 | 1 | 4 | 3 |

- (1) 変量  $y$  の平均  $\mu_y$  と分散  $\sigma_y^2$  を求めよ。
- (2) 変量  $x$  と変量  $y$  の相関関係について説明せよ。
- (3) 2 人の生徒を無作為に復元抽出し、いとこの数  $Y_1, Y_2$  を調べる。標本  $Y_1, Y_2$  について、標本平均の期待値を求めよ。また、この場合、標本平均の分散は標本分散の期待値に等しくなることを示し、その値を求めよ。







