

2000 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 12 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
理 系 学 部	事前に確認すること

〔 1 〕 関数 $f_n(x) = \sin^{n+2} x + 2 \cos^{n+2} x$ ($n = 1, 2, \dots$) について, 次の問いに答えよ。

(1) 閉区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ における $f_n(x)$ の最大値 M_n と最小値 L_n を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{L_n}$ を求めよ。

〔 2 〕 e を自然対数の底とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $x \geq 0$ のとき，不等式 $e^x \geq 1 + x$ を示せ。

(2) $\tan \theta = M$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) のとき，等式 $\int_0^M \frac{1}{1+x^2} dx = \theta$ を示せ。

(3) $M > 0$ のとき，不等式 $\int_0^M \frac{1}{e^{x^2}} dx < \frac{\pi}{2}$ を示せ。

〔 3 〕 すべての正の実数 x について $x^{\sqrt{a}} \leq a^{\sqrt{x}}$ となる正の実数 a を求めよ。

〔 4 〕 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 = A$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

(1) $a + d \neq 1$ のとき、 A を決定せよ。

(2) 実数 u, v, x, y が $ux + vy = 1$ を満たすとき、2 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ は $X^2 = X$ を満たすことを示せ。

(3) $a + d = 1$ のとき、 $d \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ が成り立ち、 A は (2) の X の形になることを示せ。

〔 5 〕 次の問いに答えよ。

- (1) 点 $(3, 0)$ を通り, 円 $(x+3)^2 + y^2 = 4$ と互いに外接する円の中心 (X, Y) の軌跡を求めよ。
- (2) (1) の軌跡上の点と定点 $(0, a)$ との距離の最小値を求めよ。

〔 6 〕 2つの変数 X, Y のそれぞれについて m 個の資料 $x_1, \dots, x_m$, および n 個の資料 $y_1, \dots, y_n$ が与えられている。 X, Y の資料に対する平均を $\bar{x}, \bar{y}$, 分散を S_x^2, S_y^2 とする。 X と Y の資料を合わせて得られる $(m+n)$ 個の資料 $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ の平均を $\bar{z}$, 分散を S_z^2 とする。このとき, 次の等式を示せ。

$$(1) \quad \bar{z} = \frac{1}{m+n}(m\bar{x} + n\bar{y})$$

$$(2) \quad S_z^2 = \frac{mS_x^2 + nS_y^2}{m+n} + \frac{mn}{(m+n)^2}(\bar{x} - \bar{y})^2$$

〔 7 〕 自然数 n を与え, 関数

$$f(x) = \frac{x^n}{n+1} + \frac{x^{n-1}}{n} + \cdots + \frac{x}{2} + 1$$

を定義するとき, 方程式 $f(x) = 0$ の近似解を求めるプログラムを考える。ただし, $x = c$ での関数値 $f(c)$ の計算には $P_0 = \frac{1}{n+1}$ を初項とする漸化式

$$P_{k+1} = cP_k + \frac{1}{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

を用いる。以下の問いに答えよ。

- (1) P_2 を求めよ。
- (2) P_k を求め, $P_n = f(c)$ を確かめよ。
- (3) $f(a)f(b) < 0$ となる実数 a, b ($a < b$) が与えられたときに, 閉区間 $[a, b]$ における方程式 $f(x) = 0$ の近似解を 2 分法によって求めるプログラムを書け。ただし, 反復を停止する条件は区間幅が 10^{-4} 以下とする。

