

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（文系）

対象年度：2025 年

試験時間：120 分

問題数：3 問

第 1 問

実数の組 (a, r) に関する以下の条件 (A) を考える。

- (A) 初項 a , 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ は, すべての正の整数 n について $\tan a_{n+1} = \tan 3a_n$ を満たす。ただし, いずれの正の整数 n に対しても, a_n および $3a_n$ は $\frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k は整数) の形でない。
- (1) 組 (a, r) が条件 (A) を満たすとき, $\tan ar = \tan 3a$ および $\tan ar^2 = \tan 3ar$ が成り立つことを示せ。
- (2) 組 (a, r) が条件 (A) を満たし, かつ $\frac{a}{\pi}$ が無理数であるとき, $r = 3$ であることを示せ。
- (3) 組 $\left(\frac{2}{5}\pi, r\right)$ が条件 (A) を満たすとき, r は整数であることを示せ。
- (4) $1 \leq r \leq 10$ を満たす r で, 組 $\left(\frac{2}{5}\pi, r\right)$ が条件 (A) を満たすものをすべて求めよ。

第 2 問

正の実数 p に対して、 $f(x) = x^3 - x + p$ とする。

- (1) x についての方程式 $f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつとき、 p のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) a, b, c は実数で $c > 0$ とする。また、 i を虚数単位とする。 $a, b + ci, b - ci$ が方程式 $f(x) = 0$ の解であるとき、 a, c, p をそれぞれ b を用いて表し、 b のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) (2) の b, c について、少なくともどちらか一方は整数でないことを示せ。

第 3 問

座標平面において円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ を C とする。 a を 1 より大きい実数とし、2 点 $A(2a, 0)$, $B(-a, 0)$ をとる。点 A を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが小さい方を ℓ_1 とし、点 B を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが大きい方を ℓ_2 とする。 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を D とする。

- (1) 直線 ℓ_1 の方程式を a を用いて表せ。
- (2) 点 D から x 軸へ下ろした垂線と x 軸の交点を H とする。 $\triangle BDH$ と $\triangle ADH$ の面積の比が $5:4$ であるとき、 a の値を求めよ。
- (3) a が (2) で求めた値であるとき、 $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ。また、 $\triangle ABD$ の外接円の中心と半径を求めよ。