

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（文系）

対象年度：2023 年

試験時間：120 分

問題数：3 問

第 1 問

曲線 $C: y = x - x^3$ 上の点 $A(1, 0)$ における接線を ℓ とし, C と ℓ の共有点のうち A とは異なる点を B とする。また, $-2 < t < 1$ とし, C 上の点 $P(t, t - t^3)$ をとる。さらに, 三角形 ABP の面積を $S(t)$ とする。

- (1) 点 B の座標を求めよ。
- (2) $S(t)$ を求めよ。
- (3) t が $-2 < t < 1$ の範囲を動くとき, $S(t)$ の最大値を求めよ。

第 2 問

α, β を実数とし, $\alpha > 1$ とする。曲線 $C_1: y = |x^2 - 1|$ と曲線 $C_2: y = -(x - \alpha)^2 + \beta$ が, 点 (α, β) と点 (p, q) の 2 点で交わるとする。また, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S_1 とし, x 軸, 直線 $x = \alpha$, および C_1 の $x \geq 1$ を満たす部分で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

- (1) p を α を用いて表し, $0 < p < 1$ であることを示せ。
- (2) S_1 を α を用いて表せ。
- (3) $S_1 > S_2$ であることを示せ。

第 3 問

座標空間内の原点 O を中心とする半径 r の球面 S 上に 4 つの頂点がある四面体 $ABCD$ が,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

を満たしているとする。また三角形 ABC の重心を G とする。

- (1) $\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OD}$ を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$ を r を用いて表せ。
- (3) 点 P が球面 S 上を動くとき、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$ の最大値を r を用いて表せ。さらに、最大値をとるときの点 P に対して、 $|\overrightarrow{PG}|$ を r を用いて表せ。