

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（文系）

対象年度：2019 年

試験時間：120 分

問題数：3 問

第 1 問

$k > 0$, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ とする。放物線 $C: y = x^2 - kx$ と直線 $\ell: y = (\tan \theta)x$ の交点のうち、原点 O と異なるものを P とする。放物線 C の点 O における接線を ℓ_1 とし、点 P における接線を ℓ_2 とする。直線 ℓ_1 の傾きが $-\frac{1}{3}$ で、直線 ℓ_2 の傾きが $\tan 2\theta$ であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) k を求めよ。
- (2) $\tan \theta$ を求めよ。
- (3) 直線 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を Q とする。 $\angle PQO = \alpha$ (ただし $0 \leq \alpha \leq \pi$) とするとき、 $\tan \alpha$ を求めよ。

第 2 問

以下の問いに答えよ。

- (1) a, b, c, x, y, z, M は正の実数とする。 $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ がすべて M 以下のとき,

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} \leq M$$

であることを示せ。

- (2) $\log_2 5$ と $\log_3 5$ の大小を比較せよ。

- (3) n が正の整数のとき,

$$1 < \frac{1 + \log_2 5 + (\log_2 5)^n}{1 + \log_3 5 + (\log_3 5)^n} < 2^n$$

であることを示せ。

第 3 問

四面体 $OABC$ について、 $OA = OB = OC$ および $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$ が成り立つとする。 $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ を満たす実数 s, t に対し、辺 OA を $s : 1 - s$ に内分する点を D とし、辺 OB を $t : 1 - t$ に内分する点を E とする。 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{OC}$ となる点 F, G をとり、線分 EF と線分 DG が 1 点で交わるとし、その交点を P とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\angle AOB = \theta$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $t = s$ であることを示し、 $\overrightarrow{OP}$ を s , $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{DG}$ であるとき、 $\cos \theta$ を s を用いて表せ。
- (3) $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{DG}$ かつ $\sqrt{3}OP = OA$ であるとき、 s の値を求めよ。