

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（文系）

対象年度：2018年

試験時間：120分

問題数：3問

第 1 問

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。放物線 $y = x^2$ 上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(\tan \theta, \tan^2 \theta)$, $B(-\tan \theta, \tan^2 \theta)$ をとる。三角形 OAB の内心の y 座標を p とし, 外心の y 座標を q とする。また, 正の実数 a に対して, 直線 $y = a$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ で表す。

- (1) p, q を $\cos \theta$ を用いて表せ。
- (2) $\frac{S(p)}{S(q)}$ が整数であるような $\cos \theta$ の値をすべて求めよ。

第 2 問

放物線 $C: y = x^2 + ax + b$ が 2 直線 $\ell_1: y = px$ ($p > 0$), $\ell_2: y = qx$ ($q < 0$) と接している。また, C と ℓ_1, ℓ_2 で囲まれた図形の面積を S とする。

- (1) a, b を p, q を用いてそれぞれ表せ。
- (2) S を p, q を用いて表せ。
- (3) ℓ_1, ℓ_2 が直交するように p, q が動くとき, S の最小値を求めよ。

第 3 問

正三角形 OAB に対し、直線 OA 上の点 $P_1, P_2, P_3, \dots$ および直線 OB 上の点 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ を、次の (I), (II), (III) を満たすようにとる。

- (I) $P_1 = A$ である。
- (II) 線分 $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \dots$ はすべて直線 OA に垂直である。
- (III) 線分 $Q_1P_2, Q_2P_3, Q_3P_4, \dots$ はすべて直線 OB に垂直である。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。点 O を基準とする位置ベクトルが、整数 k, ℓ によって $k\vec{a} + \ell\vec{b}$ と表される点全体の集合を S とする。 n を自然数とすると、以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OP_n}$ と $\overrightarrow{OQ_n}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{OR} = x\vec{a} + y\vec{b}$ で定まる点 R が線分 Q_nP_{n+1} 上にあるとき、 x を y を用いて表せ。また、線分 Q_nP_{n+1} 上にある S の点の個数を求めよ。
- (3) 三角形 $OP_{n+1}Q_n$ の周または内部にある S の点の個数を求めよ。