

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（文系）

対象年度：2017年

試験時間：120分

問題数：3問

第 1 問

a を正の実数とする。2 つの関数

$$y = \frac{1}{3}ax^2 - 2a^2x + \frac{7}{3}a^3, \quad y = -\frac{2}{3}ax^2 + 2a^2x - \frac{2}{3}a^3$$

のグラフは、2 点 A, B で交わる。但し、A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。
また、2 点 A, B を結ぶ線分の垂直二等分線を ℓ とする。

- (1) 2 点 A, B の座標を a を用いて表せ。
- (2) 直線 ℓ の方程式を a を用いて表せ。
- (3) 原点と直線 ℓ の距離 d を a を用いて表せ。また、 $a > 0$ の範囲で d を最大にする a の値を求めよ。

第 2 問

a, b, c を実数とし, β, m をそれぞれ $0 < \beta < 1, m > 0$ を満たす実数とする。また, 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は $x = \beta, -\beta$ で極値をとり, $f(-1) = f(\beta) = -m$, $f(1) = f(-\beta) = m$ を満たすとする。

- (1) a, b, c , および β, m の値を求めよ。
- (2) 関数 $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ は, $-1 \leq x \leq 1$ に対して $f(-1) \leq g(x) \leq f(1)$ を満たすとする。 $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくとき, $h(-1), h(-\beta), h(\beta), h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより, $h(x)$ を求めよ。

第 3 問

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3a_n^2 + a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たすとする。また, $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $b_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) を示せ。
- (2) b_n ($n = 1, 2, \dots$) の一の位の数 $が 2$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。
- (3) a_{2017} の一の位の数 $を求めよ。$