

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（文系）

対象年度：2016 年

試験時間：120 分

問題数：3 問

第 1 問

k を実数とする。 xy 平面の曲線 $C_1: y = x^2$ と $C_2: y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ が異なる共有点 P, Q を持つとする。ただし点 P, Q の x 座標は正であるとする。また、原点を O とする。

- (1) k のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) k が (1) の範囲を動くとき、 $\triangle OPQ$ の重心 G の軌跡を求めよ。
- (3) $\triangle OPQ$ の面積を S とするとき、 S^2 を k を用いて表せ。
- (4) k が (1) の範囲を動くとする。 $\triangle OPQ$ の面積が最大となるような k の値と、そのときの重心 G の座標を求めよ。

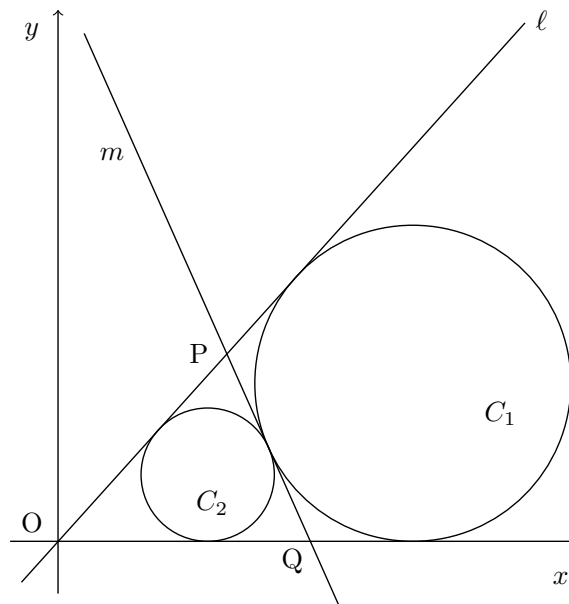
第 2 問

xy 平面の直線 $y = (\tan 2\theta)x$ を ℓ とする。ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ とする。図で示すように、円 C_1 , C_2 を以下の (i)~(iv) で定める。

- (i) 円 C_1 は直線 ℓ および x 軸の正の部分と接する。
- (ii) 円 C_1 の中心は第 1 象限にあり、原点 O から中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である。
- (iii) 円 C_2 は直線 ℓ , x 軸の正の部分, および円 C_1 と接する。
- (iv) 円 C_2 の中心は第 1 象限にあり、原点 O から中心までの距離 d_2 は $d_1 > d_2$ を満たす。

円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち, x 軸, 直線 ℓ と異なる直線を m とし, 直線 m と直線 ℓ , x 軸との交点をそれぞれ P , Q とする。

- (1) 円 C_1 , C_2 の半径を $\sin \theta$, $\cos \theta$ を用いて表せ。
- (2) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき, 線分 PQ の長さの最大値を求めよ。
- (3) (2) の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ。



第 3 問

四面体 OABC において, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。このとき等式

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1$$

が成り立つとする。 t は実数の定数で, $0 < t < 1$ を満たすとする。線分 OA を $t : 1 - t$ に内分する点を P とし, 線分 BC を $t : 1 - t$ に内分する点を Q とする。また, 線分 PQ の中点を M とする。

- (1) $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と t を用いて表せ。
- (2) 線分 OM と線分 BM の長さが等しいとき, 線分 OB の長さを求めよ。
- (3) 4 点 O, A, B, C が点 M を中心とする同一球面上にあるとする。このとき, $\triangle OAB$ と $\triangle OCB$ は合同であることを示せ。