

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（文系）

対象年度：2015 年

試験時間：120 分

問題数：3 問

第 1 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 座標平面において、次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x^2 + y \leq 1 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$$

- (2) 2つの放物線 $y = x^2 - 2x + k$ と $y = -x^2 + 1$ が共有点をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。
- (3) x, y が (1) の連立不等式を満たすとき、 $y - x^2 + 2x$ の最大値および最小値と、それらを与える x, y の値を求めよ。

第 2 問

半径 1 の円を内接円とする三角形 ABC が、辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形であるとする。辺 BC, CA, AB と内接円の接点をそれぞれ P, Q, R とする。また、 $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ とし、三角形 ABC の面積を S とする。

- (1) 線分 AQ の長さを α を用いて表し、線分 QC の長さを β を用いて表せ。
- (2) $t = \tan \frac{\beta}{2}$ とおく。このとき、 S を t を用いて表せ。
- (3) 不等式 $S \geq 3\sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。さらに、等号が成立するのは、三角形 ABC が正三角形のときに限ることを示せ。

第 3 問

p と q は正の整数とする。2 次方程式 $x^2 - 2px - q = 0$ の 2 つの実数解を α, β とする。ただし $\alpha > \beta$ とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{2}(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。ただし $\alpha^0 = 1, \beta^0 = 1$ と定める。

- (1) すべての自然数 n に対して、 $a_{n+2} = 2pa_{n+1} + qa_n$ であることを示せ。
- (2) すべての自然数 n に対して、 a_n は整数であることを示せ。
- (3) 自然数 n に対し、 $\frac{\alpha^{n+1}}{2}$ 以下の最大の整数を b_n とする。 p と q が $q < 2p + 1$ を満たすとき、 b_n を a_n を用いて表せ。