

入学試験過去問題

数 学

筑波大学（文系）

対象年度：2014 年

試験時間：120 分

問題数：2 問

第 1 問

$f(x) = x^3 - x$ とする。 $y = f(x)$ のグラフに点 $P(a, b)$ から引いた接線は 3 本あるとする。3 つの接点 $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, $C(\gamma, f(\gamma))$ を頂点とする三角形の重心を G とする。

- (1) $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ および $\alpha\beta\gamma$ を a, b を用いて表せ。
- (2) 点 G の座標を a, b を用いて表せ。
- (3) 点 G の x 座標が正で, y 座標が負となるような点 P の範囲を図示せよ。

第 2 問

平面上の直線 ℓ に同じ側で接する 2 つの円 C_1, C_2 があり, C_1 と C_2 も互いに外接している。 ℓ, C_1, C_2 で囲まれた領域内に, これら 3 つと互いに接する円 C_3 を作る。同様に ℓ, C_n, C_{n+1} ($n = 1, 2, 3, \dots$) で囲まれた領域内にあり, これら 3 つと互いに接する円を C_{n+2} とする。円 C_n の半径を r_n とし, $x_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおく。このとき, 以下の問いに答えよ。ただし, $r_1 = 16, r_2 = 9$ とする。

- (1) ℓ が C_1, C_2, C_3 と接する点を, それぞれ A_1, A_2, A_3 とおく。線分 A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 の長さおよび r_3 の値を求めよ。
- (2) ある定数 a, b に対して $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) となることを示せ。 a, b の値も求めよ。
- (3) (2) で求めた a, b に対して, 2 次方程式 $t^2 = at + b$ の解を α, β ($\alpha > \beta$) とする。 $x_1 = c\alpha^2 + d\beta^2$ を満たす有理数 c, d の値を求めよ。ただし, $\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい。
- (4) (3) の c, d, α, β に対して,

$$x_n = c\alpha^{n+1} + d\beta^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となることを示し, 数列 $\{r_n\}$ の一般項を α, β を用いて表せ。

