

2025 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

● 総 合 選 抜

文系学部，理系学部

● 学類・専門学群選抜

文系学部，理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

選抜区分	学部	1	2	3	4	5	6	備 考
総合選抜	文系	☐	☐	☐				☐ 印から 2 問を選択解答すること。
	理系	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐ 印から 2 問を選択， ☐ 印から 2 問を選択，計 4 問を解答すること。
学類・専門学群選抜	文系	☐	☐	☐				☐ 印から 2 問を選択解答すること。
	理系	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐ 印から 2 問を選択， ☐ 印から 2 問を選択，計 4 問を解答すること。

〔 1 〕 実数の組 (a, r) に関する以下の条件 (A) を考える。

(A) 初項 a 、公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ は、すべての正の整数 n について $\tan a_{n+1} = \tan 3a_n$ を満たす。ただし、いずれの正の整数 n に対しても、 a_n および $3a_n$ は $\frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k は整数) の形でない。

(1) 組 (a, r) が条件 (A) を満たすとき、 $\tan ar = \tan 3a$ および $\tan ar^2 = \tan 3ar$ が成り立つことを示せ。

(2) 組 (a, r) が条件 (A) を満たし、かつ $\frac{a}{\pi}$ が無理数であるとき、 $r = 3$ であることを示せ。

(3) 組 $(\frac{2}{5}\pi, r)$ が条件 (A) を満たすとき、 r は整数であることを示せ。

(4) $1 \leq r \leq 10$ を満たす r で、組 $(\frac{2}{5}\pi, r)$ が条件 (A) を満たすものをすべて求めよ。

〔 2 〕 正の実数 p に対して、 $f(x) = x^3 - x + p$ とする。

- (1) x についての方程式 $f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつとき、 p のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) a, b, c は実数で $c > 0$ とする。また、 i を虚数単位とする。 $a, b + ci, b - ci$ が方程式 $f(x) = 0$ の解であるとき、 a, c, p をそれぞれ b を用いて表し、 b のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) (2) の b, c について、少なくともどちらか一方は整数でないことを示せ。

〔 3 〕 座標平面において円 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ を C とする。 a を 1 より大きい実数とし、2 点 $A(2a, 0)$, $B(-a, 0)$ をとる。点 A を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが小さい方を ℓ_1 とし、点 B を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが大きい方を ℓ_2 とする。 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を D とする。

- (1) 直線 ℓ_1 の方程式を a を用いて表せ。
- (2) 点 D から x 軸へ下ろした垂線と x 軸の交点を H とする。 $\triangle BDH$ と $\triangle ADH$ の面積の比が $5 : 4$ であるとき、 a の値を求めよ。
- (3) a が (2) で求めた値であるとき、 $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ。また、 $\triangle ABD$ の外接円の中心と半径を求めよ。

[4] i を虚数単位とする。 a は 1 でない正の実数の定数とする。複素数平面において、方程式 $|z - a^2i| = a|z - i|$ を満たす点 z が表す図形を C とする。

(1) 図形 C は原点 O を中心とする円であることを示し、その半径を求めよ。

以下の問いでは点 z は円 C 上を動くとし、 z の偏角を θ とする。ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。また、 $w = z - \frac{1}{z}$ とおく。

(2) $|w - 2i|^2$ を a と $\sin \theta$ を用いて表せ。

(3) $|w - 2i| + |w + 2i|$ は点 z の位置によらない定数であることを示せ。

[5] $f(x) = \frac{\sin(\log x)}{x}$ ($x > 1$) について以下の問いに答えよ。

- (1) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ。
- (2) n を正の整数とする。関数 $f(x)$ が極大値をとる x で, $e^{2(n-1)\pi} < x < e^{2n\pi}$ となるものがただ 1 つ存在することを示せ。また, 関数 $f(x)$ が極小値をとる x で, $e^{2(n-1)\pi} < x < e^{2n\pi}$ となるものがただ 1 つ存在することを示せ。
- (3) 正の整数 n に対して, (2) の極大値をとる x を α_n , 極小値をとる x を β_n とする。このとき,

$$\frac{1}{\pi} \left\{ \log \left| \sum_{n=1}^{\infty} f''(\alpha_n) \right| - \log \left| \sum_{n=1}^{\infty} f''(\beta_n) \right| \right\}$$

は整数となる。その値を求めよ。

[6] $f(x) = \sqrt{x} e^{-\frac{x^2}{4}}$ ($x \geq 0$) とし, $\alpha = \int_0^5 f(x) dx$ とする。

(1) $f(x)$ ($x \geq 0$) が最大値をとることを示し, その値 M を求めよ。

(2) $0 \leq x \leq 5$ において $e^{-\frac{25}{4}} \sqrt{x} \leq f(x)$ を示せ。また, $\frac{10}{3} f(5) \leq \alpha$ を示せ。

(3) M は (1) で求めたものとし, 実数 t は $\frac{2}{3} f(5) \leq t \leq M$ の範囲を動くとする。
曲線 $y = f(x) - t$ ($x \geq 0$), 2 直線 $x = 0$, $x = 5$, および x 軸で囲まれた図形を, x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(t)$ とする。 $V(t)$ の最小値を α を用いて表せ。

