

2023 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●総 合 選 抜

文系学部，理系学部

●学類・専門学群選抜

文系学部，理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

選抜区分	学部	1	2	3	4	5	6	備 考
総合選抜	文系	☐	☐	☐				☐ 印から 2 問を選択解答すること。
	理系	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐ 印から 2 問を選択， ☐ 印から 2 問を選択，計 4 問を解答すること。
学類・専門学群選抜	文系	☐	☐	☐				☐ 印から 2 問を選択解答すること。
	理系	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐ 印から 2 問を選択， ☐ 印から 2 問を選択，計 4 問を解答すること。

〔 1 〕 曲線 $C : y = x - x^3$ 上の点 $A(1, 0)$ における接線を ℓ とし、 C と ℓ の共有点のうち A とは異なる点を B とする。また、 $-2 < t < 1$ とし、 C 上の点 $P(t, t - t^3)$ をとる。さらに、三角形 ABP の面積を $S(t)$ とする。

(1) 点 B の座標を求めよ。

(2) $S(t)$ を求めよ。

(3) t が $-2 < t < 1$ の範囲を動くとき、 $S(t)$ の最大値を求めよ。

[2] α, β を実数とし, $\alpha > 1$ とする。曲線 $C_1: y = |x^2 - 1|$ と曲線 $C_2: y = -(x - \alpha)^2 + \beta$ が, 点 (α, β) と点 (p, q) の 2 点で交わるとする。また, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S_1 とし, x 軸, 直線 $x = \alpha$, および C_1 の $x \geq 1$ を満たす部分で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

(1) p を α を用いて表し, $0 < p < 1$ であることを示せ。

(2) S_1 を α を用いて表せ。

(3) $S_1 > S_2$ であることを示せ。

- 〔 3 〕 座標空間内の原点 O を中心とする半径 r の球面 S 上に 4 つの頂点がある四面体 $ABCD$ が,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

を満たしているとする。また三角形 ABC の重心を G とする。

- (1) $\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OD}$ を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$ を r を用いて表せ。
- (3) 点 P が球面 S 上を動くとき、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$ の最大値を r を用いて表せ。さらに、最大値をとるときの点 P に対して、 $|\overrightarrow{PG}|$ を r を用いて表せ。

[4] a, b を実数とし, $f(x) = x + a \sin x, g(x) = b \cos x$ とする。

(1) 定積分 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ を求めよ。

(2) 不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) + g(x)\}^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) 曲線 $y = |f(x) + g(x)|$, 2 直線 $x = -\pi, x = \pi$, および x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。このとき不等式

$$V \geq \frac{2}{3}\pi^2(\pi^2 - 6)$$

が成り立つことを示せ。さらに, 等号が成立するときの a, b を求めよ。

[5] $f(x) = x^{-2}e^x$ ($x > 0$) とし, 曲線 $y = f(x)$ を C とする。また h を正の実数とする。さらに, 正の実数 t に対して, 曲線 C , 2 直線 $x = t$, $x = t + h$, および x 軸で囲まれた図形の面積を $g(t)$ とする。

(1) $g'(t)$ を求めよ。

(2) $g(t)$ を最小にする t がただ 1 つ存在することを示し, その t を h を用いて表せ。

(3) (2) で得られた t を $t(h)$ とする。このとき極限值 $\lim_{h \rightarrow +0} t(h)$ を求めよ。

〔 6 〕 i を虚数単位とする。複素数平面に関する以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $|z+2| = 2|z-1|$ を満たす点 z の全体が表す図形は円であることを示し、その円の中心と半径を求めよ。

(2) 等式

$$\{|z+2| - 2|z-1|\}|z+6i| = 3\{|z+2| - 2|z-1|\}|z-2i|$$

を満たす点 z の全体が表す図形を S とする。このとき S を複素数平面上に図示せよ。

(3) 点 z が (2) における図形 S 上を動くとき、 $w = \frac{1}{z}$ で定義される点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

