

2022 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

● 総 合 選 抜

文系学部，理系学部

● 学類・専門学群選抜

文系学部，理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

選抜区分	学部	1	2	3	4	5	6	備 考
総合選抜	文系	☐	☐	☐				☐ 印から 2 問を選択解答すること。
	理系	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐ 印から 2 問を選択， ☐ 印から 2 問を選択，計 4 問を解答すること。
学類・専門学群選抜	文系	☐	☐	☐				☐ 印から 2 問を選択解答すること。
	理系	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐ 印から 2 問を選択， ☐ 印から 2 問を選択，計 4 問を解答すること。

〔 1 〕 t, p を実数とし, $t > 0$ とする。 xy 平面において, 原点 O を中心とし点 $A(1, t)$ を通る円を C_1 とする。また, 点 A における C_1 の接線を ℓ とする。直線 $x = p$ を軸とする 2 次関数のグラフ C_2 は, x 軸と接し, 点 A において直線 ℓ とも接するとする。

(1) 直線 ℓ の方程式を t を用いて表せ。

(2) p を t を用いて表せ。

(3) C_2 と x 軸の接点を M とし, C_2 と y 軸の交点を N とする。 t が正の実数全体を動くとき, 三角形 OMN の面積の最小値を求めよ。

〔 2 〕 整数 $a_1, a_2, a_3, \dots$ を, さいころをくり返し投げるにより, 以下のように定めていく。まず, $a_1 = 1$ とする。そして, 正の整数 n に対し, a_{n+1} の値を, n 回目に
出たさいころの目に応じて, 次の規則で定める。

(規則) n 回目に出了目が 1, 2, 3, 4 なら $a_{n+1} = a_n$ とし, 5, 6 なら $a_{n+1} = -a_n$ とする。

たとえば, さいころを 3 回投げ, その出た目が順に 5, 3, 6 であったとすると,
 $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -1, a_4 = 1$ となる。

$a_n = 1$ となる確率を p_n とする。ただし, $p_1 = 1$ とし, さいころのどの目も, 出る
確率は $\frac{1}{6}$ であるとする。

(1) p_2, p_3 を求めよ。

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(3) $p_n \leq 0.5000005$ を満たす最小の正の整数 n を求めよ。ただし, $0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ であることを用いてよい。

〔 3 〕 $0 < t < 1$ とする。平行四辺形 ABCD について、線分 AB, BC, CD, DA を $t : 1 - t$ に内分する点をそれぞれ A_1, B_1, C_1, D_1 とする。さらに、点 A_2, B_2, C_2, D_2 および A_3, B_3, C_3, D_3 を次の条件を満たすように定める。

(条件) $k = 1, 2$ について、点 $A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}, D_{k+1}$ は、それぞれ線分 $A_k B_k, B_k C_k, C_k D_k, D_k A_k$ を $t : 1 - t$ に内分する。

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{A_1 B_1} = p \vec{a} + q \vec{b}, \overrightarrow{A_1 D_1} = x \vec{a} + y \vec{b}$ を満たす実数 p, q, x, y を t を用いて表せ。
- (2) 四角形 $A_1 B_1 C_1 D_1$ は平行四辺形であることを示せ。
- (3) $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{A_3 B_3}$ が平行となるような t の値を求めよ。

[4] $0 < a < 4$ とする。曲線

$$C_1 : y = 4 \cos^2 x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right),$$

$$C_2 : y = a - \tan^2 x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

は、ちょうど 2 つの共有点をもつとする。

(1) a の値を求めよ。

(2) C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

〔 5 〕 曲線 $C : y = (x + 1)e^{-x}$ ($x > -1$) 上の点 P における法線と x 軸との交点を Q とする。点 P の x 座標を t とし、点 Q と点 $R(t, 0)$ との距離を $d(t)$ とする。

(1) $d(t)$ を t を用いて表せ。

(2) $x \geq 0$ のとき $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ であることを示せ。

(3) 点 P が曲線 C 上を動くとき、 $d(t)$ の最大値を求めよ。

[6] i は虚数単位とする。次の条件 (I), (II) をどちらも満たす複素数 z 全体の集合を S とする。

(I) z の虚部は正である。

(II) 複素数平面上の点 $A(1)$, $B(1 - iz)$, $C(z^2)$ は一直線上にある。

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 1 でない複素数 α について、 α の虚部が正であることは、 $\frac{1}{\alpha - 1}$ の虚部が負であるための必要十分条件であることを示せ。

(2) 集合 S を複素数平面上に図示せよ。

(3) $w = \frac{1}{z - 1}$ とする。 z が S を動くとき、 $\left| w + \frac{i}{\sqrt{2}} \right|$ の最小値を求めよ。

