

2021 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部, 理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
文 系 学 部	事前に確認すること
理 系 学 部	事前に確認すること

〔 1 〕 xy 平面において 2 つの円

$$C_1 : x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 = 0,$$

$$C_2 : x^2 - 8x + y^2 - 4y + k = 0$$

が外接するとし、その接点を P とする。以下の問いに答えよ。

- (1) k の値を求めよ。
- (2) P の座標を求めよ。
- (3) 円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち点 P を通らないものは 2 本ある。これら 2 直線の交点 Q の座標を求めよ。

〔 2 〕 $t = \sin \theta + \cos \theta$ とし, θ は $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くものとする。

(1) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ と $\cos 4\theta$ を, それぞれ t を用いて表せ。

(3) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \cos 4\theta$ であるとき, t の値をすべて求めよ。

〔3〕 O を原点とする座標空間において、3 点 $A(-2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を通る平面を α とする。2 点 $P(0, 5, 5)$, $Q(1, 1, 1)$ をとる。点 P を通り $\overrightarrow{OQ}$ に平行な直線を ℓ とする。直線 ℓ 上の点 R から平面 α に下ろした垂線と α の交点を S とする。 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ}$ (ただし k は実数) とおくとき、以下の問いに答えよ。

(1) k を用いて、 $\overrightarrow{AS}$ を成分で表せ。

(2) 点 S が $\triangle ABC$ の内部または周にあるような k の値の範囲を求めよ。

〔 4 〕 p, q を定数とし, $0 < p < 1$ とする。

曲線 $C_1 : y = px^{\frac{1}{p}} \ (x > 0)$ と,

曲線 $C_2 : y = \log x + q \ (x > 0)$

が, ある 1 点 (a, b) において同じ直線に接するとする。曲線 C_1 , 直線 $x = a$, 直線 $x = e^{-q}$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とする。また, 曲線 C_2 , 直線 $x = a$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

(1) q を p を用いて表せ。

(2) S_1, S_2 を p を用いて表せ。

(3) $\frac{S_2}{S_1} \geq \frac{3}{4}$ であることを示せ。ただし, $2.5 < e < 3$ を用いてよい。

〔 5 〕 O を原点とする xy 平面において、点 $A(-1, 0)$ と点 $B(2, 0)$ をとる。円 $x^2 + y^2 = 1$ の、 $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ を満たす部分を C とし、また点 B を通り y 軸に平行な直線を ℓ とする。2 以上の整数 n に対し、曲線 C 上に点 P, Q を

$$\angle POB = \frac{\pi}{n}, \quad \angle QOB = \frac{\pi}{2n}$$

を満たすようにとる。直線 AP と直線 ℓ の交点を V とし、直線 AQ と直線 ℓ の交点を W とする。線分 AP 、線分 AQ および曲線 C で囲まれた図形の面積を $S(n)$ とする。また線分 PV 、線分 QW 、曲線 C および線分 VW で囲まれた図形の面積を $T(n)$ とする。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n\{S(n) + T(n)\}$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n)}{S(n)}$ を求めよ。

[6] i は虚数単位とする。複素数平面において、複素数 z の表す点 P を $P(z)$ または点 z と書く。 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおき、3 点 $A(1)$, $B(\omega)$, $C(\omega^2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ を考える。

- (1) $\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。
- (2) 点 z が辺 AC 上を動くとき、点 $-z$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。
- (3) 点 z が辺 AB 上を動くとき、点 z^2 が描く図形を E_1 とする。また、点 z が辺 AC 上を動くとき、点 z^2 が描く図形を E_2 とする。 E_1 と E_2 の共有点をすべて求めよ。

