

2020 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部, 理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
文 系 学 部	事前に確認すること
理 系 学 部	事前に確認すること

[1] xy 平面上の 3 点 $A(0, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の内接円を T とする。点 $D(0, -1)$ を通り、傾きが正である直線を $\ell: y = ax - 1$ とする。

- (1) 円 T の半径を r とする。 r を求めよ。
- (2) 直線 ℓ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点のうち、 D と異なる点を E とする。点 E の座標を a を用いて表せ。
- (3) 直線 ℓ が円 T に接するとする。このとき、(2) で求めた点 E を通り、 x 軸と平行な直線が、円 T に接することを示せ。

〔 2 〕 xy 平面において, 円 $x^2 + y^2 = 1$ の $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ を満たす部分を C_1 とする。また, 直線 $y = x$ の $x \leq 0$ を満たす部分を C_2 とする。 C_1 上の点 A, C_2 上の点 B および点 P $(-1, 0)$ について, $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ であるとする。点 A の座標を $(\cos \theta, \sin \theta)$ とする。ただし $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。

(1) 点 B の x 座標を θ を用いて表せ。

(2) 線分 AB の中点の x 座標が 0 以上であるような θ の範囲を求めよ。

〔 3 〕 O を原点とする xy 平面上に 2 直線

$$\ell : y = \sqrt{3}x, \quad m : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

がある。正の整数 n に対して、 ℓ 上に点 $P_n(n, \sqrt{3}n)$ をとり、 m 上に点 $Q_n\left(x_n, -\frac{1}{\sqrt{3}}x_n\right)$ をとる。ただし、 x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は次の条件 (I), (II) を満たすとする。

(I) $x_1 = 1$ である。

(II) $n \geq 2$ のとき、 x_n は、 Q_{n-1} を通り ℓ と平行な直線と、 x 軸との交点の x 座標である。

また、正の整数 n に対して、 $\triangle OP_n Q_n$ の面積を a_n とする。

(1) x_n を n を用いて表せ。

(2) a_n を n を用いて表せ。

(3) 正の整数 n に対して、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ と定める。 S_n を n を用いて表せ。

〔 4 〕 関数 $f(\theta)$, $g(\theta)$ を

$$f(\theta) = \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad g(\theta) = \sin 2\theta$$

と定める。 xy 平面上の曲線 C が, 媒介変数 θ を用いて

$$x = f(\theta), \quad y = g(\theta) \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

で表されている。

(1) 次の定積分 I_1 , I_2 , I_3 の値を求めよ。

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \cos 2\theta \, d\theta, \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta \cos 2\theta \, d\theta$$

(2) $\frac{dy}{dx}$ を θ の関数として表し, 曲線 C の概形を xy 平面上に描け。

(3) 曲線 C , x 軸および y 軸で囲まれた図形を, y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

〔 5 〕 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \frac{c}{1+c}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。ただし、 c は正の実数である。

(1) a_2, a_3 を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$ を求めよ。

〔 6 〕 i は虚数単位とする。複素数 z に対して、その共役複素数を $\bar{z}$ で表す。複素数平面上で、次の等式を満たす点 z の全体が表す図形を C とする。

$$z\bar{z} + (1 + 3i)z + (1 - 3i)\bar{z} + 9 = 0$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 図形 C を複素数平面上に描け。
- (2) 複素数 w に対して、 $\alpha = w + \bar{w} - 1$, $\beta = w + \bar{w} + 1$ とする。 w , α , β が表す複素数平面上の点をそれぞれ P , A , B とする。点 P は C 上を動くとする。 $\triangle PAB$ の面積が最大となる複素数 w , およびそのときの $\triangle PAB$ の外接円の中心と半径を求めよ。

