

2019 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部, 理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
文 系 学 部	事前に確認すること
理 系 学 部	事前に確認すること

[1] $k > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ とする。放物線 $C : y = x^2 - kx$ と直線 $\ell : y = (\tan \theta)x$ の交点のうち、原点 O と異なるものを P とする。放物線 C の点 O における接線を ℓ_1 とし、点 P における接線を ℓ_2 とする。直線 ℓ_1 の傾きが $-\frac{1}{3}$ で、直線 ℓ_2 の傾きが $\tan 2\theta$ であるとき、以下の問いに答えよ。

(1) k を求めよ。

(2) $\tan \theta$ を求めよ。

(3) 直線 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を Q とする。 $\angle PQO = \alpha$ (ただし $0 \leq \alpha \leq \pi$) とするとき、 $\tan \alpha$ を求めよ。

〔 2 〕 以下の問いに答えよ。

- (1) a, b, c, x, y, z, M は正の実数とする。 $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ がすべて M 以下のとき,

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} \leq M$$

であることを示せ。

- (2) $\log_2 5$ と $\log_3 5$ の大小を比較せよ。

- (3) n が正の整数のとき,

$$1 < \frac{1 + \log_2 5 + (\log_2 5)^n}{1 + \log_3 5 + (\log_3 5)^n} < 2^n$$

であることを示せ。

〔 3 〕 四面体 $OABC$ について、 $OA = OB = OC$ および $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$ が成り立つとする。 $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ を満たす実数 s, t に対し、辺 OA を $s : 1 - s$ に内分する点を D とし、辺 OB を $t : 1 - t$ に内分する点を E とする。 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{OC}$ となる点 F, G をとり、線分 EF と線分 DG が 1 点で交わるとし、その交点を P とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\angle AOB = \theta$ とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) $t = s$ であることを示し、 $\overrightarrow{OP}$ を s , $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{DG}$ であるとき、 $\cos \theta$ を s を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{DG}$ かつ $\sqrt{3} OP = OA$ であるとき、 s の値を求めよ。

[4] $0 \leq x \leq \pi$ の範囲において、関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = 1 + \sin x, \quad g(x) = -1 - \cos x$$

と定める。

- (1) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲において、 $|f(x)| = |g(x)|$ を満たす x を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$, 曲線 $y = g(x)$, 直線 $x = 0$ および直線 $x = \pi$ で囲まれる部分を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

〔 5 〕 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $t > 0$ のとき, $1 \leq \frac{e^t - 1}{t} \leq e^t$ であることを示せ。

(2) 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ を

$$\begin{cases} x_n = \log(e^{a_n} + 1) \\ y_n = \log(e^{a_n} - 1) \\ z_n = y_n + \sum_{k=1}^n x_k \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。 z_n は n によらない定数であることを示せ。

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^{a_k} + 1}{2}\right)$ を求めよ。

[6] $|z|^2 + 3 = 2(z + \bar{z})$ を満たす複素数 z 全体の集合を A とする。ただし $\bar{z}$ は z の共役複素数である。

- (1) 集合 A を複素数平面上に図示せよ。
- (2) A の要素 z の偏角を θ とする。ただし $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。 z が A を動くとき、 θ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) z^{50} が正の実数となる A の要素 z の個数を求めよ。

