

2018 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部，理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
文 系 学 部	事前に確認すること
理 系 学 部	事前に確認すること

[1] $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。放物線 $y = x^2$ 上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(\tan \theta, \tan^2 \theta)$, $B(-\tan \theta, \tan^2 \theta)$ をとる。三角形 OAB の内心の y 座標を p とし, 外心の y 座標を q とする。また, 正の実数 a に対して, 直線 $y = a$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ で表す。

(1) p, q を $\cos \theta$ を用いて表せ。

(2) $\frac{S(p)}{S(q)}$ が整数であるような $\cos \theta$ の値をすべて求めよ。

〔 2 〕 放物線 $C: y = x^2 + ax + b$ が 2 直線 $\ell_1: y = px$ ($p > 0$), $\ell_2: y = qx$ ($q < 0$) と接している。また, C と ℓ_1, ℓ_2 で囲まれた図形の面積を S とする。

(1) a, b を p, q を用いてそれぞれ表せ。

(2) S を p, q を用いて表せ。

(3) ℓ_1, ℓ_2 が直交するように p, q が動くとき, S の最小値を求めよ。

〔 3 〕 正三角形 OAB に対し、直線 OA 上の点 $P_1, P_2, P_3, \dots$ および直線 OB 上の点 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ を、次の (I), (II), (III) を満たすようにとる。

(I) $P_1 = A$ である。

(II) 線分 $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \dots$ はすべて直線 OA に垂直である。

(III) 線分 $Q_1P_2, Q_2P_3, Q_3P_4, \dots$ はすべて直線 OB に垂直である。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。点 O を基準とする位置ベクトルが、整数 k, ℓ によって $k\vec{a} + \ell\vec{b}$ と表される点全体の集合を S とする。 n を自然数とすると、以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP_n}$ と $\overrightarrow{OQ_n}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OR} = x\vec{a} + y\vec{b}$ で定まる点 R が線分 Q_nP_{n+1} 上にあるとき、 x を y を用いて表せ。また、線分 Q_nP_{n+1} 上にある S の点の個数を求めよ。

(3) 三角形 $OP_{n+1}Q_n$ の周または内部にある S の点の個数を求めよ。

〔 4 〕 2つの曲線

$$C_1 : y = \frac{1}{\sqrt{2} \sin x} \quad (0 < x < \pi),$$

$$C_2 : y = \sqrt{2} (\sin x - \cos x) \quad (0 < x < \pi)$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点の x 座標を求めよ。
- (2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V が π^2 であることを示せ。

[5] $f(x) = \int_0^x \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt$ とし, $c \geq \pi$ とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = c$, $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める。

(1) $f(\pi)$ を求めよ。また, $x \geq \pi$ のとき, $0 < f'(x) \leq \frac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して, $a_n \geq \pi$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して, $|a_{n+1} - \pi| \leq \frac{2}{\pi}|a_n - \pi|$ が成り立つことを示せ。
また, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

〔 6 〕 複素数 α に対して、複素数平面上の 3 点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\alpha^2)$ を考える。次の条件 (I), (II), (III) をすべて満たす複素数 α 全体の集合を S とする。

(I) α は実数でも純虚数でもない。

(II) $|\alpha| > 1$ である。

(III) 三角形 OAB は直角三角形である。

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) α が S に属するとき、 $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ。

(2) 集合 S を複素数平面に図示せよ。

(3) x, y を $\alpha^2 = x + yi$ を満たす実数とする。 α が S を動くとき、 xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求め、図示せよ。

