

2017 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部，理系学部

|     |
|-----|
| 注 意 |
|-----|

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

| 学 部     | 解 答 す べ き 問 題 |
|---------|---------------|
| 文 系 学 部 | 事前に確認すること     |
| 理 系 学 部 | 事前に確認すること     |

〔 1 〕  $a$  を正の実数とする。2 つの関数

$$y = \frac{1}{3}ax^2 - 2a^2x + \frac{7}{3}a^3, \quad y = -\frac{2}{3}ax^2 + 2a^2x - \frac{2}{3}a^3$$

のグラフは、2 点 A, B で交わる。但し、A の  $x$  座標は B の  $x$  座標より小さいとする。また、2 点 A, B を結ぶ線分の垂直二等分線を  $\ell$  とする。

- (1) 2 点 A, B の座標を  $a$  を用いて表せ。
- (2) 直線  $\ell$  の方程式を  $a$  を用いて表せ。
- (3) 原点と直線  $\ell$  の距離  $d$  を  $a$  を用いて表せ。また、 $a > 0$  の範囲で  $d$  を最大にする  $a$  の値を求めよ。

〔 2 〕  $a, b, c$  を実数とし,  $\beta, m$  をそれぞれ  $0 < \beta < 1, m > 0$  を満たす実数とする。また, 関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  は  $x = \beta, -\beta$  で極値をとり,  $f(-1) = f(\beta) = -m, f(1) = f(-\beta) = m$  を満たすとする。

(1)  $a, b, c$ , および  $\beta, m$  の値を求めよ。

(2) 関数  $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$  は,  $-1 \leq x \leq 1$  に対して  $f(-1) \leq g(x) \leq f(1)$  を満たすとする。 $h(x) = f(x) - g(x)$  とおくとき,  $h(-1), h(-\beta), h(\beta), h(1)$  それぞれと 0 との大きさを比較することにより,  $h(x)$  を求めよ。

〔 3 〕 数列  $\{a_n\}$  が

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3a_n^2 + a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たすとする。また,  $b_n = a_{n+1} - a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とおく。以下の問いに答えよ。

- (1)  $b_n \geq 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を示せ。
- (2)  $b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) の一の位の数  $2$  であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。
- (3)  $a_{2017}$  の一の位の数  $2$  を求めよ。

〔 4 〕 関数

$$f(x) = 2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} \quad (x > 0)$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式  $f(x) = 0$  の解をすべて求めよ。
- (2) 関数  $f(x)$  のすべての極値を求めよ。
- (3) 曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

[ 5 ]  $xy$  平面において,  $x$  座標と  $y$  座標がともに整数である点を格子点という。また, 実数  $a$  に対して,  $a$  以下の最大の整数を  $[a]$  で表す。記号  $[ \ ]$  をガウス記号という。以下の問いでは  $N$  を自然数とする。

- (1)  $n$  を  $0 \leq n \leq N$  を満たす整数とする。点  $(n, 0)$  と点  $\left(n, N \sin \left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right)$  を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。
- (2) 直線  $y = x$  と,  $x$  軸, および直線  $x = N$  で囲まれた領域 (境界を含む) にある格子点の個数を  $A(N)$  とおく。このとき  $A(N)$  を求めよ。
- (3) 曲線  $y = N \sin \left(\frac{\pi x}{2N}\right)$  ( $0 \leq x \leq N$ ) と,  $x$  軸, および直線  $x = N$  で囲まれた領域 (境界を含む) にある格子点の個数を  $B(N)$  とおく。(2) の  $A(N)$  に対して  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B(N)}{A(N)}$  を求めよ。

[ 6 ]  $0 < a < \frac{\pi}{2}$  とする。複素数平面上において、原点を中心とする半径 1 の円の上に異なる 5 点  $P_1(w_1)$ ,  $P_2(w_2)$ ,  $P_3(w_3)$ ,  $P_4(w_4)$ ,  $P_5(w_5)$  が反時計まわりに並んでおり、次の 2 つの条件 (I), (II) を満たすとする。

(I)  $(\cos^2 a)(w_2 - w_1)^2 + (\sin^2 a)(w_5 - w_1)^2 = 0$  が成り立つ。

(II)  $\frac{w_3}{w_2}$  と  $-\frac{w_4}{w_2}$  は方程式  $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$  の解である。

また、五角形  $P_1P_2P_3P_4P_5$  の面積を  $S$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 五角形  $P_1P_2P_3P_4P_5$  の頂点  $P_1$  における内角  $\angle P_5P_1P_2$  を求めよ。
- (2)  $S$  を  $a$  を用いて表せ。
- (3)  $R = |w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5|$  とする。このとき、 $R^2 + 2S$  は  $a$  の値によらないことを示せ。

